Prof. Dr. H. J. Pesch
Lehrstuhl für Ingenieurmathematik
Universität Bayreuth

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen
Optimal Control of Partial Differential Equations
(Teil 2: WS 2012/13)

27. Übung

Vorbemerkung:

Zum Kapitel über semilineare elliptische Optimalsteuerungsprobleme besprechen wir noch im Nachtrag eine Aufgabe zu einem *sehr guten* Verfahren, dem SQP-Verfahren (*sequential quadratic programming*).

1) SQP-Verfahren

In jedem Iterationsschritt des SQP-Verfahrens zur Lösung eines semilinearen elliptischen Optimalsteuerungsproblems mit verteilter Steuerung,

$$\min_{u\in U_{\text{ad}}} J(y,u) := \int_\Omega \varphi\big(x,y(x)\big)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \psi\big(x,u(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
&-\Delta y + y + d(x,y) = u && \text{in } \Omega\,,\\
&\partial_\nu y = 0 && \text{auf } \Gamma\,,\\
&u \in U_{\text{ad}} := \big\{u\in L^\infty(\Omega)\colon\, u_a(x)\le u(x)\le u_b(x) && \text{fast überall}\big\}\,,
\end{aligned}$$

löst man, ausgehend von der aktuellen Iterierten (y_n,u_n,p_n), ein linear-quadratisches Optimalsteuerungsproblem der Form

$$\begin{aligned}
\min_{u\in U_{\text{ad}}} \tilde J(y,u) := &\int_\Omega \big(\varphi_y(x,y_n)\,(y-y_n) + \psi_u(x,u_n)\,(u-u_n)\big)\,\mathrm{d}x\\
&-\frac12\int_\Omega p_n\,d_{yy}(x,y_n)\,(y-y_n)^2\,\mathrm{d}x\\
&+\frac12\int_\Omega \big(\varphi_{yy}(x,y_n)\,(y-y_n)^2 + \psi_{uu}(x,u_n)\,(u-u_n)^2\big)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

unter den Nebenbedingungen

$$
\begin{aligned}
-\Delta y + y + d(x, y_n) + d_y(x, y_n)\,(y - y_n) &= u && \text{in } \Omega \\
\partial_\nu y &= 0 && \text{auf } \Gamma \\
u \in U_{\text{ad}} := \big\{ u \in L^\infty(\Omega) \colon u_a(x) \le u(x) \le u_b(x) && && \text{fast überall} \big\}\,.
\end{aligned}
$$

Man leite die adjungierte Gleichung für das linear-quadratische Teilproblem her. Wie lauten die zugehörige Variationsungleichung, das Minimumprinzip und die Projektionsformel für das linear-quadratische Teilproblem?