Elitenetzwerk Bayern

Prof. Dr. H. J. Pesch
Lehrstuhl für Ingenieurmathematik
Universität Bayreuth

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen
Optimal Control of Partial Differential Equations
(Teil 2: WS 2012/13)

26. Übung

Vorbemerkung:

Der Fokus dieses Übungsblattes liegt auf der Konstruktion eines Testbeispiels mit analytischer Lösung für ein örtlich eindimensionales Optimalsteuerungsproblem mit einem semilinearen parabolischen Anfangs-Randwertproblem als Nebenbedingung; siehe Aufgabe 2. Diese Aufgabe behandelt das Kapitel 5.8.1 des Buchs von F. Tröltzsch. Für den Beweis der globalen Optimalität der Lösung werden das Schwache Maximumprinzip bei linearen parabolischen Differentialgleichungen sowie Vergleichsprinzipien bei linearen und semilinearen parabolischen Differentialgleichungen benötigt. Diese werden in Aufgabe 1 behandelt.

1) Schwaches Maximumprinzip und Vergleichsprinzipien

Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Ortsgebiet und $Q_T := \Omega \times (0,T]$, $T > 0$, der zugehörige Orts-Zeit-Zylinder mit Mantel $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T]$. Die Menge $\Sigma := \Sigma_T \cup \big(\bar{\Omega} \times \{0\}\big)$ heißt parabolischer Rand von Q_T.

Wir betrachten dann die lineare parabolische Differentialgleichung auf Q_T,

$$P\,y := y_t + L\,y = f$$

mit dem elliptischen Differentialoperator

$$L\,y = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\, y_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i\, y_{x_i} + c\,y\,,$$

wobei $a_{i,j}$, b_i, $c \in C(\bar{Q}_T)$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$ und L elliptisch sind, d. h. $(a_{i,j})_{i,j}$ ist symmetrisch und positiv definit auf $\bar{Q}_T$.

Man zeige für Funktionen $y \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$, die für klassische Lösungen geeignet sind:

a) **Schwaches Maximumprinzip bei linearen parabolischen Differentialgleichungen**

Wenn $f \le 0$ (bzw. $f \ge 0$) sowie $c = 0$ in Q_T sind, dann gilt:

$$\max_{\bar{Q}_T} y = \max_{\Sigma} y \quad (\text{bzw.} \quad \min_{\bar{Q}_T} y = \min_{\Sigma} y)\,.$$

Hinweis: Man betrachte zunächst den Fall $f < 0$ in Q_T und zeige (durch indirekten Beweis), dass dann $y(x,t) < \max_{\bar{Q}_T} y$ für alle $(x,t) \in Q_T$, d. h., dass das Maximum von y *nicht* im Innern von Q_T liegen kann.

Den Fall $f \le 0$ führe man durch Betrachtung von $y_\varepsilon := y + \varepsilon\, e^{-t}$, $\varepsilon > 0$, auf den ersten Fall zurück. Dann lasse man $\varepsilon \to 0$ gehen.

Folgerung: Wenn in Q_T sowohl $c \ge 0$, als auch $f \le 0$ sind, dann gilt:

$$\max_{\bar{Q}_T} y \le \max_{\Sigma} y^+\,, \quad \text{wobei} \quad y^+ := \max\{0, y\}\,. \tag{1}$$

Gilt $f = 0$ in Q_T, so gilt

$$\max_{\bar{Q}_T} |y| = \max_{\Sigma} |y|\,. \tag{2}$$

Hinweis: Man betrachte den Operator $P - c$ auf $Q_T^+ := Q_T \cap \{(x,t)\colon y(x,t) > 0\}$ und wende Teilaufgabe a) an.

b) **Vergleichsprinzip bei linearen parabolischen Differentialgleichungen**

Es seien $y,\, z \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$. Dann gilt:

$$\text{(i)} \quad P\,y \le P\,z \quad \text{in} \quad Q_T \quad \text{und} \qquad y \le z \quad \text{auf} \quad \Sigma$$

$$\Longrightarrow \qquad\qquad y \le z \quad \text{auf} \quad Q_T \tag{3}$$

oder

$$\text{(ii)} \quad P\,y = P\,z \quad \text{in} \quad Q_T \quad \text{und} \qquad y = z \quad \text{auf} \quad \Sigma$$

$$\Longrightarrow \qquad\qquad y = z \quad \text{in} \quad Q_T\,. \tag{4}$$

Hinweis zu (ii): Man definiere $\bar{y} := y\, e^{-\gamma\, t}$ und zeige $P\,y = e^{\gamma\, t}\,(P + \gamma)\,\bar{y}$. Dann wähle man $\gamma \in \mathbb{R}_+$ so, dass $\gamma \ge -c(x,t)$ für alle $(x,t) \in \bar{Q}_T$ ist, und verwende die Folgerung zu Teilaufgabe a).

Folgerung: Ein ähnliches Vergleichsresultat existiert auch für lineare parabolische Anfangs-Randwertaufgaben mit Randbedingungen der dritten Art. Unter den obigen Voraussetzungen gilt:

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y &\ge 0 && \text{in } Q_T \\ \partial_\nu y + a\, y &\ge 0 && \text{in } \Sigma_T \quad \text{mit} \quad a \ge 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y \ge 0 \quad \text{in } Q_T\,. \\ y(x,0) &\ge 0 && \text{in } \Omega \end{aligned}$$

c) Vergleichsprinzip bei semilinearen parabolischen Differentialgleichungen

Es seien $y \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$, $b \in C^1(\mathbb{R})$ und f_i, g_i und $w_i \in C(\bar{Q}_T)$, $i = 1, 2$, mit $f_2 \geq f_1$, $g_2 \geq g_1$, $w_2 \geq w_1$. Zudem sei b noch monoton wachsend. Dann gilt für zwei Lösungen y_1 und y_2 der beiden folgenden Anfangs-Randwertprobleme,

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y &= f_i && \text{in } Q_T \\ \partial_\nu y + b(y) &= g_i && \text{in } \Sigma_T \\ y(x,0) &= w_i && \text{in } \Omega\,, \end{aligned}$$

dass $y_2 \geq y_1$ ist.

Hinweis: Man betrachte die Differenz $y := y_2 - y_1$ und wende die Folgerung zu Teilaufgabe b) an.

2) Konstruktion eines Testbeispiels

Wir betrachten ein örtlich eindimensionales Optimalsteuerungsproblem auf dem Rechteck $Q := (0,l) \times (0,T)$ und setzen das Zielfunktional wie folgt an:

$$\min J(y,u) := \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^l \big(y(x,T) - y_\Omega(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x}_{\text{tracking type}} \quad \underbrace{- \int_0^T a_y(t)\, y(l,t)\,\mathrm{d}t}_{\substack{\text{Maximierung des gewichteten}\\ \text{Zustands am rechten Rand}}}$$

$$+ \underbrace{\int_0^T \left(a_u(t)\, u(t) + \frac{\lambda}{2} u(t)^2\right) \mathrm{d}t}_{\substack{\text{Minimierung der Summe aus gewichtetem}\\ \text{Steuerungsaufwand und Energie (Regularisierungsterm)}}} \tag{5}$$

Die Nebenbedingungen seien von der Form:

$$y_t(x,t) - y_{xx}(x,t) = 0 \qquad \text{in } Q\,, \tag{6}$$

$$y_x(0,t) = 0 \qquad \text{in } (0,T)\,, \tag{7}$$

$$y_x(l,t) + y(l,t) = \beta(t) + u(t) - \chi(y(l,t)) \qquad \text{in } (0,T)\,, \tag{8}$$

$$y(x,0) = a(x) \qquad \text{in } (0,l)\,, \tag{9}$$

$$u \in U_{\text{ad}} := \big\{ u \in L^\infty(0,T) \colon 0 \le u(t) \le 1 \quad \text{fast überall} \big\}\,. \tag{10}$$

Aufgabe ist es, die Parameter l, T und λ sowie die Funktionen y_Ω, a_y, a_u, β, χ und a so zu bestimmen, dass die Optimalsteuerungsaufgabe eine analytische Lösung $(\bar{y}, \bar{u}, p)$ besitzt. Die Funktionenklasse, aus denen die Funktionen zu wählen sind, ist dabei nicht vorgeschrieben. Lediglich für die Nichtlinearität geben wir eine Stefan-Bolzmann-Randbedingung vor:

$$\chi(y) := y\,|y|^3\,. \tag{11}$$

Zur Konstruktion dieses Testbeispiels gehen wir schrittweise vor, indem wir uns einen geeigneten Kandidaten $(\bar{y}, \bar{u}, p)$ für eine optimale Lösung vorgeben und dann die oben genannten „freien“ Funktionen passend dazu wählen.

a) Man bestimme eine Lösung $\bar{y}$, die das Anfangs-Randwertproblem der Nebenbedingungen löst und bestimme damit l, $a(x)$ und im Wesentlichen auch schon $\beta(t)$.

b) Man stelle die adjungierte Gleichung auf und bestimme eine Lösung p. Diese legt die Funktionen $a_y(t)$ und $y_\Omega(x)$ fest.

c) Man wähle den Parameter T. (Gibt es dafür eine sinnvolle Bedingung?)

d) Dann bestimme man zu $\bar{y}$ und p eine Steuerung $\bar{u}$ so, dass sie den notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung genügt, insbesondere gebe man die Projektionsformel für $\bar{u}$ an. Damit lassen sich der Parameter λ und die Funktion $a_u(t)$ festlegen.

Hinweis: Für a_u kann man sich auf eine konstante Funktion beschränken. Um eine „schöne“ Schaltstruktur mit zwei Randsteuerungsbögen und einem freien Teilstück der Form $\bar{u} = 0$ — $\bar{u} \in (0, 1)$ — $\bar{u} = 1$ zu erhalten, wähle man die Schaltpunkte t_1 und t_2 so, dass sie das Intervall $(0, T)$ äquidistant unterteilen. Ist $\bar{u}$ stetig?

e) Für die so gefundene Lösung $(\bar{y}, \bar{u}, p)$ überprüfe man die hinreichenden Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung.

f) Man beweise, dass die so gefundene Lösung $(\bar{y}, \bar{u}, p)$ sogar global optimal ist.

Hinweis: Man entwickle zunächst $f(u) - f(\bar{u})$ bis Terme einschließlich zweiter Ordnung (integrales Restglied). Man beachte dabei, dass zur „Zwischenstelle“ $\tilde{u}$ der Zustand $\tilde{y} = G(\tilde{u})$ und zu diesem der adjungierte Zustand $\tilde{p} = F(\tilde{y})$ gehört, wobei F den Lösungsoperator des adjungierten Anfangs-Randwertproblems bezeichnet.

Für den dann nötig werdenden Nachweis der Nichtpositivität von $\tilde{p}$ zeige man zunächst $y(x, T) - y_\Omega(x) < 0$ für *alle* zulässigen Zustände y. Dazu muss man den Nachweis führen, dass für alle zulässigen Zustände $y \geq 0$ gilt; man verwende dazu das Vergleichsprinzip aus Teilaufgabe 1c). Dann wende man das Maximumprinzip für lineare parabolische Gleichungen sowohl für die Zustandsgleichung, als auch für die adjungierte Gleichung an; siehe Teilaufgabe 1a.