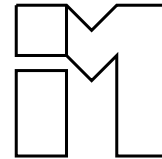




Prof. Dr. H. J. Pesch
Lehrstuhl für Ingenieurmathematik
Universität Bayreuth



Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen Optimal Control of Partial Differential Equations (Teil 2: WS 2012/13)

25. Übung

Vorbemerkung:

In diesem Blatt behandeln wir semilineare parabolische Optimalsteuerungsprobleme, insbesondere die Herleitung notwendiger Bedingungen erster Ordnung.

1) Instationäre Supraleitung

Zu minimieren sei das Zielfunktional

$$\min J(y, v) := \frac{1}{2} \|y(\cdot, T) - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|y - y_\Sigma\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|v\|_{L^2(Q)}^2$$

unter den Nebenbedingungen

$$y_t - \Delta y + y^3 = v \quad \text{in } Q,$$

$$\partial_\nu y + \beta(x, t) y = 0 \quad \text{in } \Sigma,$$

$$y(\cdot, 0) = y_0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$v \in V_{\text{ad}} := \{v \in L^\infty(Q) : -1 \leq v(x, t) \leq +1 \quad \text{fast überall}\}.$$

- Unter welchen (minimalen) Voraussetzungen existiert für jedes Paar (v, y_0) eine Lösung $y \in W(0, T) \cap C(\bar{Q})$ des semilinearen Randwertproblems?
- Unter welchen (minimalen) Voraussetzungen existiert mindestens eine (global) optimale Steuerung \bar{v} ?
- Wie lautet die adjungierte Gleichung? Unter welchen Voraussetzungen ist der adjungierte Zustand stetig?
- Man gebe notwendige Bedingungen (Variationsungleichung, Projektionsformel, etc.) für die Fälle $\lambda > 0$ und $\lambda = 0$ an. Welchem Raum gehört die optimale Steuerung \bar{v} an?

2) Wärmeleitungsgleichung mit Stefan-Boltzmann-Randbedingung

Zu minimieren sei das Zielfunktional

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \|y(\cdot, T) - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|y - y_Q\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Sigma)}^2$$

unter den Nebenbedingungen

$$y_t - \Delta y = 0 \quad \text{in } Q,$$

$$\partial_\nu y + y^3 |y| = u \quad \text{in } \Sigma,$$

$$y(\cdot, 0) = y_0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$u \in U_{\text{ad}} := \{u \in L^\infty(\Sigma) : 0 \leq u(x, t) \leq 1 \quad \text{fast überall}\}.$$

- a) Unter welchen (minimalen) Voraussetzungen existiert für jedes Paar (u, y_0) eine Lösung $y \in W(0, T) \cap C(\bar{Q})$ des semilinearen Randwertproblems?
- b) Unter welchen (minimalen) Voraussetzungen existiert mindestens eine (global) optimale Steuerung \bar{u} ?
- c) Wie lautet die adjungierte Gleichung? Unter welchen Voraussetzungen ist der adjungierte Zustand stetig?
- d) Man gebe notwendige Bedingungen (Variationsungleichung, Projektionsformel, etc.) für die Fälle $\lambda > 0$ und $\lambda = 0$ an. Welchem Raum gehört die optimale Steuerung \bar{u} an?