Prof. Dr. H. J. Pesch
Lehrstuhl für Ingenieurmathematik
Universität Bayreuth

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen
Optimal Control of Partial Differential Equations

(Teil 2: WS 2012/13)

25. Übung

Vorbemerkung:

In diesem Blatt behandeln wir semilineare parabolische Optimalsteuerungsprobleme, insbesondere die Herleitung notwendiger Bedingungen erster Ordnung.

1) Instationäre Supraleitung

Zu minimieren sei das Zielfunktional

$$\min J(y,v) := \frac{1}{2}\|y(\cdot,T) - y_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|y - y_\Sigma\|^2_{L^2(\Sigma)} + \frac{\lambda}{2}\|v\|^2_{L^2(Q)}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y + y^3 &= v && \text{in } Q\,, \\ \partial_\nu y + \beta(x,t)\,y &= 0 && \text{in } \Sigma\,, \\ y(\cdot,0) &= y_0 && \text{in } \Omega\,, \\ v \in V_{\text{ad}} &:= \big\{ v \in L^\infty(Q)\colon\ -1 \le v(x,t) \le +1 && \text{fast überall} \big\}\,. \end{aligned}$$

a) Unter welchen (minimalen) Voraussetzungen existiert für jedes Paar (v, y_0) eine Lösung $y \in W(0,T) \cap C(\bar{Q})$ des semilinearen Randwertproblems?

b) Unter welchen (minimalen) Voraussetzungen existiert mindestens eine (global) optimale Steuerung $\bar{v}$?

c) Wie lautet die adjungierte Gleichung? Unter welchen Voraussetzungen ist der adjungierte Zustand stetig?

d) Man gebe notwendige Bedingungen (Variationsungleichung, Projektionsformel, etc.) für die Fälle $\lambda > 0$ und $\lambda = 0$ an. Welchem Raum gehört die optimale Steuerung $\bar{v}$ an?

2) Wärmeleitungsgleichung mit Stefan-Boltzmann-Randbedingung

Zu minimieren sei das Zielfunktional

$$\min J(y,u) := \frac{1}{2}\|y(\cdot,T)-y_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|y-y_Q\|^2_{L^2(Q)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\Sigma)}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y &= 0 && \text{in } \ Q\,, \\ \partial_\nu y + y^3\,|y| &= u && \text{in } \Sigma\,, \\ y(\cdot,0) &= y_0 && \text{in } \ \Omega\,, \\ u \in U_{\mathrm{ad}} &:= \big\{u \in L^\infty(\Sigma)\colon 0 \le u(x,t) \le 1 && \text{fast überall}\big\}\,. \end{aligned}$$

a) Unter welchen (minimalen) Voraussetzungen existiert für jedes Paar (u, y_0) eine Lösung $y \in W(0,T) \cap C(\bar{Q})$ des semilinearen Randwertproblems?

b) Unter welchen (minimalen) Voraussetzungen existiert mindestens eine (global) optimale Steuerung $\bar{u}$?

c) Wie lautet die adjungierte Gleichung? Unter welchen Voraussetzungen ist der adjungierte Zustand stetig?

d) Man gebe notwendige Bedingungen (Variationsungleichung, Projektionsformel, etc.) für die Fälle $\lambda > 0$ und $\lambda = 0$ an. Welchem Raum gehört die optimale Steuerung $\bar{u}$ an?