Prof. Dr. H. J. Pesch
Lehrstuhl für Ingenieurmathematik
Universität Bayreuth

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen
Optimal Control of Partial Differential Equations
(Teil 2: WS 2012/13)

24. Übung

Vorbemerkung:

In diesem Übungsblatt beschäftigen wir uns mit der Herleitung von Optimalitätsbedingungen für allgemeinere Optimalsteuerungsprobleme mit parabolischen Differentialgleichungen. Die Verallgemeinerungen betreffen verteilte statt Randsteuerungen, allgemeinere Zielfunktionale und allgemeinere elliptische Operatoren in den parabolischen Gleichungen.

1) Optimale instationäre Temperaturquelle.

Gegeben sei das linear-quadratische parabolische Optimalsteuerungsproblem

$$\begin{aligned}\min J(y,u) &:= \frac{1}{2} \int\limits_{\Sigma} \left(y(x,t) - y_\Sigma(x,t)\right)^2 \,\mathrm{d}s(x)\,\mathrm{d}t + \frac{\lambda}{2} \iint\limits_{Q} u(x,t)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\,\|y - y_\Sigma\|^2_{L^2(\Sigma)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(Q)}\end{aligned}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} y_t - \Delta y &= \beta\, u && \text{in } Q\,, \\ \partial y_\nu &= 0 && \text{in } \Sigma\,, \\ y(0) &= 0 && \text{in } \Omega \end{aligned}$$

sowie

$$u \in U_{\mathrm{ad}} := \{u \in L^2(Q) \colon u_a(x,t) \le u(x,t) \le u_b(x,t) \quad \text{fast überall in } Q\}\,.$$

Dabei sollen folgende Voraussetzungen gelten: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet mit Rand Γ und $Q := \Omega \times (0,T)$, $T > 0$, der Raum-Zeit-Zylinder mit Rand $\Sigma := \Gamma \times (0,T)$. Es seien $y_\Sigma \in L^2(\Sigma)$, $\beta \in L^\infty(Q)$, $u_a \in L^2(Q)$ und $u_b \in L^2(Q)$. Ferner sei $\lambda > 0$.

Man zeige: Eine Steuerung $\bar{u} \in U_{\mathrm{ad}}$ ist genau dann optimal für das Problem der optimalen instationären Temperaturquelle, wenn sie der folgenden Variationsungleichung genügt

$$\iint\limits_Q \left(\beta(x,t)\, p(x,t) + \lambda\, \bar{u}(x,t)\right) \left(u(x,t) - \bar{u}(x,t)\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \geq 0 \quad \forall\, u \in U_{\mathrm{ad}}\,.$$

Man gebe das zugehörige adjungierte System an.

Hinweis: Man passe die Vorgehensweise aus der Vorlesung zum analogen Beweis für eine optimale instationäre Randtemperatur an und begründe jeden Schritt genau, insbesondere die Anwendung der einschlägigen Sätze aus der Vorlesung bzw. dem Buch von F. Tröltzsch.

2) Differentialoperator in Divergenzform.

Gegeben sei das linear-quadratische parabolische Optimalsteuerungsproblem

$$\begin{aligned} \min J(y,v,u) := \frac{\lambda_\Omega}{2}\, \|y(T) - y_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda_Q}{2}\, \|y - y_Q\|^2_{L^2(Q)} \\ + \frac{\lambda_\Sigma}{2}\, \|y - y_\Sigma\|^2_{L^2(\Sigma)} + \frac{\lambda_v}{2} \|v\|^2_{L^2(Q)} + \frac{\lambda_u}{2} \|u\|^2_{L^2(\Sigma)} \end{aligned}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} y_t(t) + \mathcal{A}y(t) + c_0(t)\, y(t) &= d(t)\, v(t) && \text{in } Q\,, \\ \partial_{\nu_\mathcal{A}} y(t) + \alpha(t)\, y(t) &= b(t)\, u(t) && \text{in } \Sigma\,, \\ y(0) &= y_0 && \text{in } \Omega \end{aligned}$$

für alle $t \in (0,T)$ sowie

$$\begin{aligned} v \in V_{\mathrm{ad}} &:= \{v \in L^2(Q)\colon v_a(x,t) \leq v(x,t) \leq v_b(x,t) \quad \text{fast überall in } Q\}\,, \\ u \in U_{\mathrm{ad}} &:= \{u \in L^2(\Sigma)\colon u_a(x,t) \leq u(x,t) \leq u_b(x,t) \quad \text{fast überall in } \Sigma\}\,. \end{aligned}$$

Dabei sollen folgende Voraussetzungen gelten: Es sei $\Omega \in \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet mit Rand Γ und $Q := \Omega \times (0,T)$, $T > 0$, der Raum-Zeit-Zylinder mit Rand $\Sigma := \Gamma \times (0,T)$.

$\mathcal{A}$ ist der in Übungsaufgabe 5, Aufgabe 1 eingeführte gleichmäßig elliptische Differentialoperator in Divergenzform:

$$\mathcal{A}\, y(x) = -\sum_{i,j=1}^{N} D_i\big(a_{ij}(x)\, D_j y(x)\big)\,.$$

Die nicht von t abhängigen Koeffizientenfunktionen a_{ij} von $\mathcal{A}$ sollen aus $L^\infty(\Omega)$ sein, der Symmetriebedingung $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ in Ω genügen sowie mit einem $\alpha_0 > 0$ die *Bedingung der gleichmäßigen Elliptizität*

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \geq \alpha_0\,|\xi|^2$$

für alle Vektoren $\xi \in \mathbb{R}^N$ und alle $x \in \Omega$ erfüllen. Mit $\partial_{\nu_\mathcal{A}}$ bezeichnen wir wieder die Ableitung in Richtung der *Konormalen* $\nu_\mathcal{A}$, definiert durch

$$(\nu_\mathcal{A})_i(x) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x)\,\nu_j\,.$$

Für die in der Aufgabenstellung auftretenden Funktionen gelte: $c_0 \in L^\infty(Q)$, $d \in L^\infty(Q)$, $\alpha \in L^\infty(\Sigma)$, $b \in L^\infty(\Sigma)$, $y_0 \in L^2(\Omega)$, $v_a \in L^2(Q)$, $v_b \in L^2(Q)$, $u_a \in L^2(\Sigma)$ und $u_b \in L^2(\Sigma)$. Ferner seien $y_\Omega \in L^2(\Omega)$, $y_Q \in L^2(Q)$, $y_\Sigma \in L^2(\Sigma)$ sowie alle Parameter λ_Ω, λ_Q,λ_Σ, λ_v und λ_u positiv.

Man zeige:

a) Das allgemeine Optimalsteuerungsproblem mit Differentialoperator in Divergenzform besitzt unter den getroffenen Voraussetzungen optimale Steuerungen $\bar{v}$ und $\bar{u}$, die im Fall $\lambda_v > 0$ und $\lambda_u > 0$ eindeutig sind.

b) Ein Paar von Steuerungen $\bar{v} \in V_{\mathrm{ad}}$ und $\bar{u} \in U_{\mathrm{ad}}$ ist genau dann optimal für das obige allgemeine parabolische Optimalsteuerungsproblem, wenn es den folgenden Variationsungleichungen genügt

$$\iint\limits_Q (d(x,t)\,p(x,t) + \lambda_v\ \bar{v}(x,t))\ (v(x,t) - \bar{v}(x,t))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \geq 0 \quad \forall\ v \in V_{\mathrm{ad}}\,,$$

$$\iint\limits_Q (b(x,t)\,p(x,t) + \lambda_u\ \bar{u}(x,t))\ (u(x,t) - \bar{u}(x,t))\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \geq 0 \quad \forall\ u \in U_{\mathrm{ad}}\,.$$

Man gebe das zugehörige adjungierte System an und zeige, dass es eine eindeutige schwache Lösung in $W(0,T)$ besitzt.

c) Leiten Sie die notwendigen Bedingungen erster Ordnung für das obige Optimalsteuerungsproblem mit der formalen Lagrange-Technik her.

Hinweis: Man verwende den Satz: Das in den Nebenbedingungen dieses Optimalsteuerungsproblems auftretende Anfangs-Randwertproblem besitzt unter den getroffenen Voraussetzungen für jedes Tripel $(v, u, y_0) \in L^2(Q) \times L^2(\Sigma) \times L^2(\Omega)$ genau eine schwache Lösung $y \in W_2^{1,0}(Q)$. Diese gehört dem

Raum $W(0,T)$ an und erfüllt mit einer von (v, u, y_0) unabhängigen Konstanten c_P die Abschätzung

$$\|y\|_{W(0,T)} \leq c_P \left(\|v\|_{L^2(Q)} + \|u\|_{L^2(\Sigma)} + \|y_0\|_{L^2(\Omega)}\right) .$$

Einen (längeren) Beweis, der im Wesentlichen auf die Monographie von

O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov und N. N. Ural'ceva:
Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type,
American Math. Society, Providence, Rhode Island, 1968,

zurückgeht, findet man in Tröltzschs Buch, S. 276ff.