Prof. Dr. H. J. Pesch
Lehrstuhl für Ingenieurmathematik
Universität Bayreuth

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen
Optimal Control of Partial Differential Equations
(Teil 2: WS 2012/13)

23. Übung

Vorbemerkung:

In diesem Übungsblatt untersuchen wir die Lösbarkeit von zwei linear-quadratischen parabolischen Optimalsteuerungsproblemen.

Die erste Aufgabe besteht in einer Verallgemeinerung der aus der Vorlesung bekannten Aufgabe der Bestimmung einer optimalen instationären Randtemperatur auf inhomogene Randbedingungen.

Die zweite Aufgabe besteht darin, eine optimale Temperaturquelle, also eine verteilte Steuerung, so zu bestimmen, dass ein vorgegebener Verlauf der Temperatur y_Σ am Rand des Raum-Zeit-Gebietes möglichst gut — in der L^2-Norm — approximiert wird. Dieses Problem kann man auch als *inverses Problem* auffassen: Es ist eine unbekannte Quelle u im Innern des Körpers Ω aus Messungen des Temperaturverlaufs $y|_\Sigma$ an der Oberfläche Γ von Ω zu bestimmen. Wegen der im Allgemeinen schlechten Kondition solcher Probleme ist das Problem zu regularisieren; dies erreicht man durch zusätzliche Minimierung der Kosten der „Steuerung" u durch den Term $\frac{1}{2}\lambda\,\|u\|^2$, $\lambda > 0$.

1) Optimale instationäre Randtemperatur.

Gegeben sei das linear-quadratische parabolische Optimalsteuerungsproblem

$$\min J(y,u) := \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \left(y(x,T) - y_\Omega(x)\right)^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{2}\iint\limits_\Sigma u(x,t)^2 \,\mathrm{d}s(x)\,\mathrm{d}t \qquad (1)$$

unter den Nebenbedingungen

$$y_t - \Delta y = 0 \qquad \text{in } Q\,, \qquad (2a)$$

$$\partial y_\nu + \alpha\, y = \beta\, u \qquad \text{in } \Sigma\,, \qquad (2b)$$

$$y(\cdot,0) = y_0 \qquad \text{in } \Omega \qquad (2c)$$

sowie

$$u_a(x,t) \le u(x,t) \le u_b(x,t) \quad \text{fast überall in } \Sigma\,. \tag{3}$$

Dabei sollen folgende Voraussetzungen gelten: Es sei $\Omega \in \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet mit Rand Γ und $Q := \Omega \times (0,T)$, $T > 0$, der Raum-Zeit-Zylinder mit Rand $\Sigma := \Gamma \times (0,T)$. Es seien $y_\Omega \in L^2(\Omega)$, $\alpha \in L^\infty(\Sigma)$, $\beta \in L^\infty(\Sigma)$, $y_0 \in L^2(\Omega)$, $u_a \in L^2(\Sigma)$ und $u_b \in L^2(\Sigma)$. Ferner sei $\lambda \ge 0$.

Man zeige: Unter diesen Voraussetzungen hat die Optimalsteuerungsaufgabe (1)–(3) mindestens eine optimale Lösung. Diese ist eindeutig bestimmt, wenn $\lambda > 0$ ist.

Hinweis: Man passe die Vorgehensweise aus der Vorlesung zum analogen Existenzbeweis für eine optimale instationäre Randtemperatur an und begründe jeden Schritt genau, insbesondere die Anwendung der einschlägigen Sätze aus der Vorlesung bzw. dem Buch von F. Tröltzsch.

2) Optimale instationäre Temperaturquelle.

Gegeben sei das linear-quadratische parabolische Optimalsteuerungsproblem

$$\min J(y,u) := \frac{1}{2} \iint\limits_{\Sigma} \left(y(x,t) - y_\Sigma(x,t)\right)^2 \,\mathrm{d}s(x)\,\mathrm{d}t + \frac{\lambda}{2} \iint\limits_{Q} u(x,t)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

unter den Nebenbedingungen

$$y_t - \Delta y = \beta\, u \qquad \text{in } Q\,, \tag{5a}$$

$$\partial y_\nu = 0 \qquad \text{in } \Sigma\,, \tag{5b}$$

$$y(\cdot,0) = 0 \qquad \text{in } \Omega \tag{5c}$$

sowie

$$u_a(x,t) \le u(x,t) \le u_b(x,t) \quad \text{fast überall in } Q\,. \tag{6}$$

Dabei sollen folgende Voraussetzungen gelten: Es sei $\Omega \in \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet mit Rand Γ und $Q := \Omega \times (0,T)$, $T > 0$, der Raum-Zeit-Zylinder mit Rand $\Sigma := \Gamma \times (0,T)$. Es seien $y_\Sigma \in L^2(\Sigma)$, $\beta \in L^\infty(Q)$, $u_a \in L^2(Q)$ und $u_b \in L^2(Q)$. Ferner sei $\lambda > 0$.

Man zeige: Unter diesen Voraussetzungen hat die Optimalsteuerungsaufgabe (4)–(6) eine eindeutige Lösung.

Hinweis: Man passe die Vorgehensweise aus der Vorlesung zum analogen Existenzbeweis für eine optimale instationäre Randtemperatur an und begründe jeden Schritt genau, insbesondere die Anwendung der einschlägigen Sätze aus der Vorlesung bzw. dem Buch von F. Tröltzsch.