Prof. Dr. H. J. Pesch
Lehrstuhl für Ingenieurmathematik
Universität Bayreuth

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen
Optimal Control of Partial Differential Equations
(Teil 2: WS 2012/13)

22. Übung

Vorbemerkung:

In diesem Übungsblatt beschäftigen wir uns mit einigen Eigenschaften abstrakter Funktion, die auf kompakten Intervallen definiert sind, also mit Abbildungen $y\colon [a,b] \to Z$, wobei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall reeller Zahlen und Z ein Banachraum ist. Insbesondere beschäftigen wir uns mit Normen, Stetigkeit, Integralen und Funktionalen dieser Funktionen.

1) Normen abstrakter Funktionen.

Man zeige: Die Funktion

$$y(x,t) = \frac{e^t}{\sqrt{x}}$$

gehört dem Raum $C\left([0,T], L^1(0,1)\right)$ an. Berechnen Sie ihre Norm in diesem Raum. In welchen Räumen $L^p\left(0,T; L^q(0,1)\right)$ liegt die Funktion?

2) Eine Abschätzung für das Riemann-Integral über einer abstrakten Funktion.

Es sei $y \in C\,([0,T],Z)$, $[0,T] \subset \mathbb{R}$, Z Banachraum.

Man zeige:

a) Wie für reellwertige Funktionen gilt für das Riemannintegral einer stetigen abstrakten Funktion auch:

$$\Big\| \int\limits_0^T y(t)\,\mathrm{d}t \Big\|_Z \le \int\limits_0^T \big\|y(t)\big\|_Z\,\mathrm{d}t\,.$$

b) Durch das stetige lineare Funktional F auf Z^*

$$F\colon Z^* \to \mathbb{R}$$

$$z^* \mapsto \int\limits_0^T \langle z^*, y(t)\rangle_{Z^*,Z}\,\mathrm{d}t$$

wird eindeutig ein Element $z \in Z$ definiert, wobei gilt $z = \int_0^T y(t)\,\mathrm{d}t$.

3) Stetigkeit abstrakter Funktionen.

a) Es sei $\{Z, \|\cdot\|_Z\}$ ein Banachraum, $y \in C\,([0,T],Z)$, $[0,T] \subset \mathbb{R}$, eine fest vorgegebene stetige, abstrakte Funktion und $F_{[t]}(z^*) := \langle z^*, y(t)\rangle_{Z^*,Z}$ für jedes $t \in [0,T]$ ein lineares Funktional auf dem Dualraum Z^* von Z.

Man zeige, dass für alle $z^* \in Z^*$ die reellwertigen Funktionen $F_{[z^*]}(t) = \langle z^*, y(t)\rangle_{Z^*,Z}$ stetige Funktionen in t sind, falls $y \in C([0,T],Z)$, …

b) … aber nicht umgekehrt. Dazu das Gegenbeispiel:

Es sei jetzt $\{H, (\cdot,\cdot)_H\}$ ein separabler Hilbertraum mit der vollständigen Orthonormalbasis $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ bzgl. des Skalarproduktes $(\cdot,\cdot)$. Wir definieren Funktionen $y(t)\colon [0,1] \to H$ folgendermaßen:

$$y(0) = 0\,,$$

$$y(t) = (1-\tau)\,e_{n+1} + \tau\,e_n \quad \text{für} \quad t = \tau\,\frac{1}{n} + (1-\tau)\,\frac{1}{n+1}\,,$$

$$\text{wobei} \quad 0 \le \tau \le 1\,.$$

Man zeige, dass die reellwertigen Funktionen

$$F_{[z^*]}(t) := (z^*, y(t))_H\,, \quad z^* \in H^* \cong H \quad \text{(Riesz)}\,,$$

für alle z^* stetig auf $[0,T]$ sind, aber die Funktion $y\colon [0,1] \to H$ nur stetig auf dem halboffenen Intervall $(0,T]$ ist, nicht jedoch in $t = 0$.

Hinweis: Ein metrischer Raum, also eine nichtleere Menge, auf der eine Metrik definiert ist, heißt separabel, wenn es eine höchstens abzählbare Menge gibt, die dicht in ihm liegt. Dann lehrt die Funktionalanalysis, dass jeder separable Prähilbertraum $H \neq \{0\}$ eine höchstens abzählbare Orthonormalbasis besitzt (Satz 24.2, H. Heuser, Funktionalanalysis, Teubner, Stuttgart, 1992, S. 177). Beispiele für separable Hilberträume sind u. a. der $L^p(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω offen und beschränkt, und die Folgenräume $l^p := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,\ x_n \in \mathbb{K}, \mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$: $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ jeweils nur für $1 \leq p < \infty$. Ferner lehrt die Funktionalanalysis, dass jeder unendlichdimensionale separable Hilbertraum normisomorph zu l^2 ist (Satz 25.2, Heuser, S. 182). Insbesondere gilt dann die Parsevalsche Gleichung

$$\|z\|_H^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(z, e_i)|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2\,,$$

wenn $z = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i\, e_i$ die Basisdarstellung von $z \in H$ ist.

4) Funktionale mit abstrakten Funktionen.

Es sei $H = L^2(\Omega)$ der dieser Aufgabe zugrundeliegende Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_H$ und $\Omega \in \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet mit Rand Γ. Mit dem Zeitintervall $(0,T)$, $T > 0$, wird mit $Q := \Omega \times (0,T)$ ein Raum-Zeit-Zylinder mit Rand $\Sigma := \Gamma \times (0,T)$ definiert. Ferner seien $c_0 \in L^\infty(Q)$, $f \in L^2(Q)$ und $g \in L^2(\Sigma)$ mit den entsprechenden abstrakten Funktionen $c_0(t)$, $f(t)$ und $g(t)$.

Man untersuche für alle festen $t \in [0,T]$ die folgenden Funktionale $G_j(t) \in V^*$, $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} G_1(t)\colon v &\mapsto (c_0(t)\, y(t), v)_H\,, \\ G_2(t)\colon v &\mapsto (f(t), v)_H\,, \\ G_3(t)\colon v &\mapsto (g(t), v)_{L^2(\Gamma)}\,. \end{aligned}$$

Hierbei ist stets $v(x,t) := v(x)\,\varphi(t)$ mit $v \in V = H^1(\Omega)$ und $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ und $y \in W_2^{1,2}(Q) \cong L^2\,(0,T; H^1(\Omega))$.[1]

[1] Die Normen in $W_2^{1,2}(Q)$ und $L^2\left(0,T; H^1(Q)\right)$ sind identisch; siehe Vorlesung. Aber es sind auch die Räume zueinander isomorph, da jede Funktion $y \in W_2^{1,2}(Q)$ durch Abänderung auf einer Menge vom Maß Null zu einer Funktion aus $L^2\left(0,T; H^1(\Omega)\right)$ wird; siehe Einar Hille, Ralph S. Phillips: *Functional Analysis and Semigroups*. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXI, Providence, Rhode Island, 1957.

Insbesondere zeige man, dass alle Funktionale linear und stetig sind und dass

$$\begin{aligned}
\|G_1(t)\|_{V^*} &\leq c\,\|y(t)\|_{H^1(\Omega)}\,,\\
\|G_2(t)\|_{V^*} &\leq c\,\|f(t)\|_{L^2(\Omega)}\,,\\
\|G_3(t)\|_{V^*} &\leq c\,\|g(t)\|_{L^2(\Gamma)}
\end{aligned}$$

mit einer gewissen Konstante c gilt. Ferner zeige man, dass $G_j \in L^2(0,T;V^*)$, $j = 1,2,3$, gilt.

Bemerkung: Die hier zu zeigenden Eigenschaften der Funktionale $G_j(t)$ füllen eine kleine Beweislücke im Satz 3.12 der Vorlesung;[2] sie heißen dort F_2, F_4 und F_5.

[2] gleiche Ziffer wie im Buch von F. Tröltzsch.