Prof. Dr. H. J. Pesch
Lehrstuhl für Ingenieurmathematik
Universität Bayreuth

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen
Optimal Control of Partial Differential Equations
(Teil 2: WS 2012/13)

21. Übung

Vorbemerkung:

In diesem Übungsblatt wollen wir notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen für örtlich *eindimensionale* parabolische Optimalsteuerungsprobleme behandeln. Mit der Lösungsformel über eine geeignete Greensche Funktion steht uns *in diesem Fall* ein mächtiges Hilfsmittel zu Verfügung.

Wir behandeln insbesondere das Problem einer steuerbaren Temperaturquelle mit dem Ziel, einen vorgegebenen instationären Temperaturverlauf $y_Q(x,t)$ in $Q := (0,1) \times (0,t)$ möglichst genau, gemessen in der L^2-Norm, zu approximieren. (Physikalisch lässt sich eine verteilte Aufheizung von Metallen z. B. durch Induktion erzeugen.)

1) Ein eindimensionales parabolisches Optimalsteuerungsproblem: Optimale Steuerung einer örtlich verteilten Temperaturquelle.

Wir betrachten das folgende linear-quadratische parabolische Optimalsteuerungsproblem über dem Raum-Zeit-Zylinder $Q := (0,1) \times (0,T)$:

$$\min J(y,u) := \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \left(y(x,t) - y_Q(x,t)\right)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_0^1 u(x,t)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

mit gegebenem $y_Q \in L^2(Q)$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} y_t(x,t) &= y_{xx}(x,t) + u(x,t) && \text{in } Q\,, \\ y_x(0,t) &= 0 && \text{in } (0,T)\,, \\ y_x(1,t) &= 0 && \text{in } (0,T)\,, \\ y(x,0) &= 0 && \text{in } (0,1) \end{aligned}$$

sowie

$$u_a(x,t) \le u(x,t) \le u_b(x,t) \quad \text{fast überall in } Q \quad \text{mit} \quad u_a\,,\ u_b \in L^2(Q)\,.$$

a) Man bestimme zur Anwendung der notwendigen Optimalitätsbedingung für das abstrakte Optimierungsproblem im Hilbertraum,[1] das man aus dem Zielfunktional über den Lösungsoperator S für die parabolische Gleichung erhält, zunächst den adjungierten Lösungsoperator S^*.

Hinweis: Man verwende die Darstellung der Lösung des Anfangs-Randwertproblems mithilfe einer geeigneten Greenschen Funktion. Für das obige Probem reduziert sich die allgemeine Lösungsformel[2] auf

$$y(x,t) = \int_0^t \int_0^1 G(x,\xi,t-s)\, u(\xi,s)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}s\,.$$

Die genaue Form der Greenschen Funktion braucht nicht bekannt zu sein! Nur ihre Existenz muss gesichert sein.

b) Man definiere den adjungierten Zustand $p(x,t)$ und gebe das adjungierte partielle Gleichungssystem an.

Hinweis: Man verwende wiederum die Darstellung der Lösung eines parabolischen Anfangs-Randwertproblems mithilfe der Greenschen Lösungsformel und beachte, dass der adjungierte Zustand einem Endwertproblem genügt, d. h. einem Anfangswertproblem mit „rückwärtslaufender“ Zeit.

c) Man formuliere notwendige und hinreichende Bedingungen.[3]

d) Man gebe für den Fall $\lambda > 0$ eine Projektionsformel für die optimale Steuerung $\bar{u}(x,t)$ an. Wie lautet die optimale Steuerung $\bar{u}(x,t)$ für den Fall $\lambda = 0$?

[1] Siehe Satz 2.10 der Vorlesung bzw. Satz 2.14 des Buches von F. Tröltzsch.

[2] Siehe Formeln (3.2.15–16) der Vorlesung bzw. (3.13), S. 100, im Buch von F. Tröltzsch.

[3] analog zu Satz 3.3 (parabolisches Randsteuerungsproblem) bzw. den Sätzen 2.18 und 2.21 (elliptische Probleme) in der Vorlesung bzw. Satz 3.3, S. 103 (parabolisches Randsteuerungsproblem), bzw. den Sätzen 2.22, S. 51, und 2.25, S. 53 (elliptische Probleme), im Buch von F. Tröltzsch.