Prof. Dr. H. J. Pesch
Lehrstuhl für Ingenieurmathematik
Universität Bayreuth

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen
Optimal Control of Partial Differential Equations
(Teil 2: WS 2012/13)

20. Übung

Vorbemerkung:

Ziel dieses Übungsblattes ist die Einübung klassischer analytischer Lösungsmethoden für gewisse parabolische Anfangs-Randwertprobleme. Die Methode von Fourier mit dem Separationsansatz führt uns dabei auf Greensche Funktionen.

Zunächst soll jedoch auf den Begriff der Kompatibilität zwischen Differentialoperator und Randbedingung eingegangen werden. Die formale Lagrange-Technik führt nämlich nur dann zu den richtigen Resultaten, wenn Differentialoperator und Randbedingungen kompatibel sind.

1) Kompatibilität von Differentialoperator und Randbedingungen und die formale Lagrange-Technik.

Wir betrachten die beiden folgenden linear-quadratischen parabolischen Optimalsteuerungsprobleme über dem Raum-Zeit-Zylinder $Q := \Omega \times (0,T)$ mit Rand Σ, wo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Lipschitzgebiet mit Rand Γ ist, also $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$:

$$\min J(y,u) := \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \left(y(x,T) - y_\Omega(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{2} \int\limits_0^T \int\limits_{\Gamma} u(x,t)^2 \, \mathrm{d}s(x) \, \mathrm{d}t$$

unter den beiden alternativen Nebenbedingungen

$$(I) \quad \begin{aligned} & y_t - \varepsilon\, \Delta y = 0 \quad \text{in } Q\,, \\ & \varepsilon\, \partial_\nu y + \alpha\, y = \beta\, u \quad \text{in } \Sigma\,, \\ & y(x,0) = y_0(x) \quad \text{in } \Omega\,, \end{aligned} \qquad (II) \quad \begin{aligned} & y_t - \Delta y = 0 \quad \text{in } Q\,, \\ & \varepsilon\, \partial_\nu y + \alpha\, y = \beta\, u \quad \text{in } \Sigma\,, \\ & y(x,0) = y_0(x) \quad \text{in } \Omega \end{aligned}$$

sowie

$$u_a(x,t) \le u(x,t) \le u_b(x,t) \quad \text{fast überall in } \Sigma\,.$$

a) Man zeige: $\varepsilon\, \partial_\nu y$ ist Konormalenableitung zum Differentialoperator $-\varepsilon\, \Delta y$, aber nicht zum Differentialoperator $-\Delta y$, d. h. (I) ist kompatibel, aber (II) nicht. Wie muss man die Randbedingung in (II) umformen, um Kompatibilität sicherzustellen?

Hinweis: In Übung 5, Aufgabe 1 hatten wir den Begriff der Konormalenableitung für den allgemeinen elliptischen Differentialoperator $\mathcal{A}$, definiert durch

$$\mathcal{A}\, y(x) = -\sum_{i,j=1}^{N} D_i\big(a_{ij}(x)\, D_j y(x)\big)$$

mit symmetrischen Koeffizientenfunktionen $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, d. h. $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ in Ω, kennengelernt. Wir lassen in dieser Definition jetzt $y = y(x,t)$ zu. Die partellen Ableitungen $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ sollen sich aber weiterhin nur auf die Ortsvariablen beziehen: $(D_1, D_2, \ldots, D_N) =:$ $\mathrm{grad}_x =: \mathrm{grad} =: \nabla_x^\top =: \nabla^\top$. Mit $\partial_{\nu_\mathcal{A}}$ hatten wir die Ableitung (bzgl. x) in Richtung der *Konormalen* $\nu_\mathcal{A}$, komponentenweise definiert durch

$$(\nu_\mathcal{A})_i(x) := \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x)\, \nu_j(x)\,,$$

bezeichnet. Es gilt also: $\partial_{\nu_A} y(x,\cdot) = \mathrm{grad}\, y(x,\cdot) \cdot \nu_A$. Hierbei bezeichnet $\nu(x) = (\nu_1(x), \ldots, \nu_N(x))$ den nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektor zum Raumgebiet Ω im Punkte $x \in \Gamma$. Fassen wir die Koeffizienten a_{ij} zu einer Matrix A zusammen, so gilt $\nu_\mathcal{A} = A\, \nu$.

b) Mithilfe der formalen Lagrange-Technik stelle man die notwendigen Bedingungen für die kompatiblen Versionen (I) und (II) auf. Wo träte ein Fehler auf, wenn man (II) nicht auf die kompatible Version umschriebe?

Joseph-Louis Lagrange: $*$ 1736 in Turin, † 1813 in Paris

2) Lösung von parabolischen Anfangs-Randwertproblemen mit der Methode von Fourier.

Gegeben seien die folgenden örtlich eindimensionalen parabolischen Anfangs-Randwertprobleme auf dem Orts-Zeitgebiet $(0, l) \times (0, T)$ mit $l > 0$ und $T > 0$:

a) Homogene Differentialgleichung mit homogenen Randbedingungen

$$y_t - a^2\, y_{xx} = 0\,, \tag{1a}$$

$$y(x, 0) = y_0(x)\,, \tag{1b}$$

$$y(0, t) = y(l, t) = 0\,. \tag{1c}$$

b) Inhomogene Differentialgleichung mit homogenen Anfangs-Randbedingungen (verteilte Steuerung)

$$y_t - a^2\, y_{xx} = v(x, t)\,, \tag{2a}$$

$$y(x, 0) = 0\,, \tag{2b}$$

$$y(0, t) = y(l, t) = 0\,. \tag{2c}$$

c) Allgemeines Dirichletsches Anfangs-Randwertproblem (verteilte Steuerung und Randsteuerungen)

$$y_t - a^2\, y_{xx} = v(x, t)\,, \tag{3a}$$

$$y(x, 0) = y_0(x)\,, \tag{3b}$$

$$y(0, t) = u_L(t)\,, \quad y(l, t) = u_R(t)\,. \tag{3c}$$

Mithilfe der Methode von Fourier zeige man, dass die (eindeutige) Lösung des Anfangs-Randwertproblems (1) lautet:

$$y(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t)\, y_0(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

mit der Greenschen Funktion

$$G(x, \xi, t) := \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{a\, n\, \pi}{l}\right)^2 t\right] \sin\left(\frac{n\, \pi}{l}\, x\right) \sin\left(\frac{n\, \pi}{l}\, \xi\right)\,.$$

Im Falle des Anfangs-Randwertproblems (2) lautet die (eindeutige) Lösung

$$y(x,t) = \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-s)\, v(\xi,s)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}s$$

mit derselben Greenschen Funktion wie für Teilaufgabe a).

Im Falle des Anfangs-Randwertproblems (3) lautet die (eindeutige) Lösung

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) + u_L(t) + \frac{x}{l}\, \left(u_R(t) - u_L(t)\right)\ ,$$

wobei $y_1(x,t)$ Lösung von (1) und $y_2(x,t)$ Lösung von (2) ist.

Hinweise:
zu a): Man verwende den Separationsansatz $\sigma(x)\,\tau(t)$ und leite daraus für die Funktion σ unter Verwendung der Randbedingungen ein Eigenwertproblem für eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung sowie für die Funktion τ eine gewöhnliche, von den Eigenwerten abhängige Differentialgleichung 1. Ordnung her. Durch Superposition — alle Anfangs-Randwertprobleme sind linear — und Entwicklung von y_0 in eine Fourier-Sinus-Reihe erfülle man schließlich auch die Anfangsbedingungen.

zu b): Aufgrund des Ergebnisses in Teilaufgabe a) setze man zur Lösung von Teilaufgabe b) für y eine Fourier-Sinus-Reihe bzgl. x an,

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t)\, \sin\left(\frac{n\,\pi}{l}\, x\right)\ ,$$

und entwickle $v(x,t)$ in eine analoge Fourier-Sinus-Reihe bzgl. x. Dies führt auf gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung für die unbekannten Koeffizientenfunktionen $y_n(t)$, die sich mithilfe der Anfangsbedingung eindeutig lösen lassen.

zu c): Dieser Fall lässt sich über einen Ansatz der Form

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) + z(x,t)$$

auf die zuvor diskutierten Sonderfälle zurückführen. Dabei wählt man für z zunächst eine Funktion, die den Randbedingungen genügt, und zeige dann, dass $y(x,t) = \bar{y}(x,t) + z(x)$ einem Anfangs-Randwertproblem mit homogenen Randbedingungen genügt (Superpositionsprinzip!).

Zusätzlicher Literaturhinweis für dieses Semester:

Neittaanmäki, P., Tiba, P.: *Optimal Control of Nonlinear Parabolic Systems*, Pure and Applied Mathematics **179**, New York: Marcel Dekker, 1994.