Prof. Dr. H. J. Pesch
Lehrstuhl für Ingenieurmathematik
Universität Bayreuth

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

Optimal Control of Partial Differential Equations

(Teil 1: WS 2011/12)

19. Übung

Vorbemerkung:

Mit diesem Übungsblatt soll das Aufstellen notwendiger Optimalitätsbedingungen für relativ allgemeine Optimalsteuerungsprobleme mit semilinearen elliptischen Gleichungen mithilfe der formalen Lagrange-Technik und des Maximum- bzw. Minimumprinzips eingeübt werden.

1) Optimalitätsbedingungen mithilfe der Lagrange-Technik.

Wir betrachten das relativ allgemeine Optimalsteuerungsproblem:

$$\min J(y,u) := \int_\Omega \varphi(x, y(x), v(x))\,\mathrm{d}x + \int_\Gamma \psi(x, y(x), u(x))\,\mathrm{d}s(x)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta y + d(x,y,v) &= 0 \quad \text{in } \Omega\,, \\ \partial_\nu y + b(x,y,u) &= 0 \quad \text{auf } \Gamma\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\text{ad}} &:= \{v \in L^\infty(\Omega) \colon v_a(x) \le v(x) \le v_b(x) \quad \text{fast überall in } \Omega\}\,, \\ U_{\text{ad}} &:= \{u \in L^\infty(\Gamma) \colon u_a(x) \le u(x) \le u_b(x) \quad \text{fast überall auf } \Gamma\}\,. \end{aligned}$$

Die Funktionen φ, ψ, d und b seien bzgl. x messbar für alle $y \in \mathbb{R}$ und bzgl. y differenzierbar für fast alle $x \in \Omega$. Außerdem seien d und b bzgl. y monoton.

Da die Steuerungen u und v nichtlinear auftreten, ist ein allgemeiner Existenzsatz nicht zu erwarten. Wir setzen daher die Existenz lokal optimaler Steuerungen $\bar{u}$ und $\bar{v}$ voraus und wollen nun für diese mithilfe der formalen Lagrange-Technik notwendige Bedingungen herleiten.

a) Man stelle die Lagrange-Funktion des Problems auf und forme sie so um, dass sie im Zustandsraum $Y = H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ erklärt ist. Dann leite man mithilfe der formalen Lagrange-Technik das (notwendige) Optimalitätssystem (erster Ordnung) für das allgemeine Steuerungsproblem her.

b) Zur Illustration untersuchen wir die Aufgabe:

$$\min J(y,u) := \int_\Omega \left[y^2 + y_\Omega\, y + \lambda_1\, v^2 + v_\Omega\, v \right] \mathrm{d}x + \int_\Gamma \lambda_2\, u^8 \, \mathrm{d}s(x)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta y + y + e^y &= v \quad \text{in } \Omega\,, \\ \partial_\nu y + y^4 &= u^4 \quad \text{on } \Gamma\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{ad}} &:= \{ v \in L^\infty(\Omega) \colon -1 \le v(x) \le 1 \quad \text{fast überall in } \Omega \}\,, \\ U_{\mathrm{ad}} &:= \{ u \in L^\infty(\Gamma) \colon 0 \le u(x) \le 1 \quad \text{fast überall in } \Gamma \} \end{aligned}$$

mit gegebenen Funktionen $y_\Omega \in L^\infty(\Omega)$ und $v_\Omega \in L^\infty(\Omega)$.

Man zeige, dass zu jedem zulässigen Paar (u,v) von Steuerungen genau ein Zustand $y \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ gehört.

Man zeige, dass es mindestens ein optimales Paar $(\bar{u},\bar{v})$ von Steuerungen gibt.

Man stelle das notwendige Optimalitätssystem (erster Ordnung) auf.

2) Optimalitätsbedingungen mithilfe des Minimum- bzw. Maximumprinzips.

Wir betrachten wieder das relativ allgemeine semilineare elliptische Optimalsteuerungsproblem mit nichtlinearem Zielfunktional aus Aufgabe 1. Die zugehörige schwache Form der Lagrangefunktion ist

$$\mathcal{L}(y,v,u,p) := J(y,v,u) - \int_\Omega (\nabla y \cdot \nabla p + d(\cdot,y,v)\,p)\,\mathrm{d}x - \int_\Gamma b(\cdot,y,u)\,p\,\mathrm{d}s\,,$$

wobei der Zustandsraum $Y := H^1(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$ sei.

Wir fassen nun die Integranden der nicht-differentiellen Terme der Lagrangefunktion zu *Hamilton-Funktionen* zusammen, getrennt nach Anteilen auf Ω und Γ, $H^\Omega\colon \Omega \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ und $H^\Gamma\colon \Gamma \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$; vgl. Übung 12, Aufgabe 2c):

$$\begin{aligned} H^\Omega(x,y,v,p_0,p) &= p_0\,\varphi(x,y,v) - d(x,y,v)\,p\,,\\ H^\Gamma(x,y,u,p_0,p) &= p_0\,\psi(x,y,u) - b(x,y,u)\,p\,. \end{aligned}$$

Man beachte, die Hamilton-Funktionen sind Funktionen reeller Variabler, ihre Argumente sind also keine Funktionen, es werden aber Funktionen eingesetzt.

Man zeige:

a) Die adjungierte Gleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} -\Delta p &= D_y H^\Omega(x,\bar y,\bar v,1,p) \quad \text{in } \Omega\,,\\ \partial_\nu p &= D_y H^\Gamma(x,\bar y,\bar u,1,p) \quad \text{auf } \Gamma\,. \end{aligned}$$

b) Die Variationsungleichungen lauten in punktweiser Formulierung

$$\begin{aligned} D_v H^\Omega(x,\bar y(x),\bar v(x),1,p)\ (v - \bar v(x)) &\ge 0 \qquad \forall\, v \in [v_a(x), v_b(x)]\,,\\ D_u H^\Gamma(x,\bar y(x),\bar u(x),1,p)\ (u - \bar u(x)) &\ge 0 \qquad \forall\, u \in [u_a(x), u_b(x)]\,, \end{aligned}$$

jeweils für fast alle $x \in \Omega$ bzw. $x \in \Gamma$.

c) Ferner gelten die schwachen Minimumprinzipien

$$\min_{v\in[v_a(x),v_b(x)]} D_v H^\Omega(x,\bar y(x),\bar v(x),1,p)\,v = D_v H^\Omega(x,\bar y(x),\bar v(x),1,p)\,\bar v\,,$$

$$\min_{u\in[u_a(x),u_b(x)]} D_u H^\Gamma(x,\bar y(x),\bar u(x),1,p)\,u = D_u H^\Gamma(x,\bar y(x),\bar u(x),1,p)\,\bar u$$

wiederum für fast alle $x \in \Omega$ bzw. $x \in \Gamma$.

d) Sind die Hamilton-Funktionen H^Ω bzw. H^Γ konvex in v bzw. u, dann sind die schwachen Minimumbedingungen äquivalent zu

$$H^\Omega(x, \bar{y}(x), \bar{v}(x), 1, p(x)) = \min_{v \in [v_a(x), v_b(x)]} D_v H^\Omega(x, \bar{y}(x), v(x), 1, p(x)),$$

$$H^\Gamma(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x), 1, p(x)) = \min_{u \in [u_a(x), u_b(x)]} D_u H^\Omega(x, \bar{y}(x), u(x), 1, p(x))$$

für fast alle $x \in \Omega$ bzw. $x \in \Gamma$.

Bemerkung: Multipliziert man die Hamiltonfunktion mit -1 und führt den negativen adjungierten Zustand $q := -p$ ein, so erhält man Maximumbedingungen:

$$H^\Omega(x, \bar{y}(x), \bar{v}(x), -1, q(x)) = \max_{v \in [v_a(x), v_b(x)]} D_v H^\Omega(x, \bar{y}(x), v(x), 1, q(x)),$$

$$H^\Gamma(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x), 1, q(x)) = \max_{u \in [u_a(x), u_b(x)]} D_u H^\Omega(x, \bar{y}(x), u(x), 1, q(x))$$

für fast alle $x \in \Omega$ bzw. $x \in \Gamma$.

Diese Bedingung ist überraschenderweise auch noch erfüllt, wenn man die Konvexitätsforderung fallen lässt. Es gilt dann das Maximumprinzip: Die optimalen Steuerungen $\bar{v} \in V_{\text{ad}}$ und $\bar{u} \in U_{\text{ad}}$ genügen dem Maximumprinzip, wenn mit $q_0 = -1$ und dem adjungierten Zustand

$$\begin{aligned} -\Delta q &= D_y H^\Omega(x, \bar{y}, \bar{v}, q_0, q) \quad \text{in } \Omega, \\ \partial_\nu q &= D_y H^\Gamma(x, \bar{y}, \bar{u}, q_0, q) \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

die folgenden Maximumbedingungen für fast alle $x \in \Omega$ bzw. $x \in \Gamma$ erfüllt sind:

$$H^\Omega(x, \bar{y}(x), \bar{v}(x), q_0, q(x)) = \max_{v \in [v_a(x), v_b(x)]} D_v H^\Omega(x, \bar{y}(x), v(x), q_0, q(x)),$$

$$H^\Gamma(x, \bar{y}(x), \bar{u}(x), q_0, q(x)) = \max_{u \in [u_a(x), u_b(x)]} D_u H^\Omega(x, \bar{y}(x), u(x), q_0, q(x)).$$

Referenzen findet man in Tröltzschs Buch, Seite 178f.