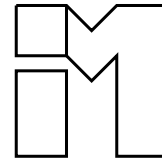




Prof. Dr. H. J. Pesch
Lehrstuhl für Ingenieurmathematik
Universität Bayreuth



Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen Optimal Control of Partial Differential Equations (Teil 1: WS 2011/12)

18. Übung

Vorbemerkung:

Mit diesem Übungsblatt untersuchen wir konkrete Optimalsteuerungsprobleme mit semilinearen elliptischen Randwertproblemen, zum einen ein Problem mit einer semilinearen elliptischen Differentialgleichung und einer verteilten Steuerung aus der Supraleitung, zum anderen ein Randsteuerungsproblem mit einer semilinearen Randbedingung vom Stefan-Boltzmann-Typ.

1) Problem aus der Supraleitung.

Wir betrachten das Problem der „Supraleitung“:

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

unter den Nebenbedingungen

$$-\Delta y + y + y^3 = u,$$

$$\partial_\nu y = 0,$$

$$|u(x)| \leq 2.$$

- a) Man zeige, dass es mindestens eine optimale Steuerung \bar{u} für das obige Optimalsteuerungsproblem gibt.

Man berechne für den Spezialfall $y_\Omega = 9$ ein „aussichtsreiches“ Lösungspaar (\bar{y}, \bar{u}) des Randwertproblems mit $\bar{y} = G(\bar{u})$.

Hinweis: Man versuche es mit einem konstanten \bar{u} .

- b) Man stelle die adjungierte Gleichung und die Variationsungleichung (notwendige Bedingung) für die optimale Steuerung auf und leite daraus die Minimumprinzipien her. Wie lauten die optimalen Steuergesetze in den Fällen $\lambda > 0$ und $\lambda = 0$ für den allgemeinen Fall und für den Spezialfall $y_\Omega = 9$?

2) Ein Randsteuerungsproblem mit einer Randbedingung vom Stefan-Boltzmann-Typ.

Wir betrachten das Randsteuerungsproblem

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta y + y &= 0, \\ \partial_\nu y + y^3 |y| &= u, \\ 0 &\leq u(x) \leq 1. \end{aligned}$$

- a) Man zeige, dass es mindestens eine optimale Steuerung gibt.
- b) Man stelle die notwendigen Optimalitätsbedingungen (adjungierte Gleichung, Variationsungleichung für die optimale Steuerung) auf.