Prof. Dr. H. J. Pesch
Lehrstuhl für Ingenieurmathematik
Universität Bayreuth

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen
Optimal Control of Partial Differential Equations
(Teil 1: WS 2011/12)

17. Übung

Vorbemerkung:

Auf dem Programm dieses Übungsblattes steht zunächst der Nachweis von Eigenschaften allgemeiner nichtlinearer zustands- und steuerungsabhängiger Zielfunktionale und der Menge der zulässigen Steuerungen, wenn die zulässigen Steuerungen L^r-Funktionen, $1 \le r \le \infty$, sind.

Die beiden ersten Aufgaben entstammen dem Buch von F. Tröltzsch; Seite 200.

Bei Optimalsteuerungsproblemen bei semilinearen partiellen Differentialgleichungen liegt wegen der Nichtlinearität der Zustandsgleichung ein nichtkonvexes Optimierungsproblem im Hilbertraum der Steuerungen vor. Daher kann man die Eindeutigkeit der optimalen Steuerung nicht ohne Zusatzannahmen zeigen. Dass sogar beliebig viele globale und lokale Minima theoretisch möglich sind, zeigen schon die beiden in Aufgabe 3 behandelten nichtlinearen Optimierungsprobleme im Banachraum (Variationsprobleme mit Ungleichungsnebenbedingungen).

1) Eigenschaften allgemeiner nichtlinearer Zielfunktionale.

Bestätigen Sie ohne Rückgriff auf Lemma 4.9,[1] dass die zustands- bzw. steuerungsabhängigen Zielfunktionale

$$F(y) = \int_\Omega \varphi(x, y(x))\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad Q(u) = \int_\Omega \psi(x, u(x))\,\mathrm{d}x$$

unter den Voraussetzungen 4.12[2] Lipschitz-stetig auf ihrem Definitionsgebiet sind. Weisen Sie außerdem nach, dass Q konvex ist, wenn ψ konvex in u ist, d. h. wenn für fast alle $x \in \Omega$, alle reellen u, v und alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt:

$$\psi(x, \lambda\, u + (1-\lambda)\, v) \le \lambda\, \psi(x, u) + (1-\lambda)\, \psi(x, v)\,.$$

[1] gleiche Nummer wie in Tröltzschs Buch.
[2] gleiche Nummer wie in Tröltzschs Buch.

Hinweis: Beim Nachweis der Lipschitzstetigkeit können Sie statt des integralen Restgliedes aus Übung 18, Aufgabe 2, der Einfachheit halber auch das Lagrangesche Restglied verwenden. Dabei entsteht eine Lücke. Wo? Welche Auswirkungen hat die Wahl des Lagrangeschen Restgliedes auf die Voraussetzungen des Existenzsatzes 4.13?

2) Eigenschaften der Menge der zulässigen L^r-Steuerungen.

Es seien eine beschränkte und messbare Menge $E \subset \mathbb{R}^N$ sowie Funktionen u_a und u_b aus $L^\infty(E)$ mit $u_a(x) \le u_b(x)$ fast überall in E gegeben. Verifizieren Sie, dass die Menge

$$U_{\text{ad}} = \{u \in L^r(E) \colon u_a(x) \le u(x) \le u_b(x) \quad \text{fast überall in } E\}$$

nichtleer, konvex, abgeschlossen und beschränkt in $L^r(E)$ ist für alle $1 \le r \le \infty$.

Hinweis zur Abgeschlossenheit: Aus $\|u_n - u\|_{L^r(\Omega)} \to 0$, $1 \le r < \infty$, fast überall in Ω für $n \to \infty$ kann man nicht folgern, dass $u_n(x) \to u(x)$ fast überall in Ω strebt. Jedoch weiss man, dass es eine Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ der Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, so dass

$$u_{n_k}(x) \to u(x) \quad \text{fast überall in } \Omega\,,\ k \to \infty$$

gilt; siehe z. B. H. W. Alt: *Lineare Funktionalanalysis*, Berlin: Springer, 4. Auflage, 2002, Lemma 1.18, Seite 52. Der einfache Beweis erfolgt mit Lemma A 1.10, Seite 76. Dass die Auswahl der Teilfolge im Allgemeinen erforderlich ist, zeigt Ü 1.5, Seite 62.

Die Abgeschlossenheit im Fall $r = \infty$ kann man direkt beweisen.

3) Optimierungsprobleme im Banachraum.

a) Wir untersuchen das Optimierungsproblem

$$\min f(u) := -\int_0^1 \cos\big(u(x)\big)\,\mathrm{d}x\,, \quad 0 \le u(x) \le 2\,\pi\,, \quad u \in L^\infty(0,1)\,.$$

Zeigen Sie, dass dieses Problem überabzählbar viele verschiedene global optimale Lösungen besitzt. Zudem liegen in jeder Umgebung einer optimalen Lösung überabzählbar viele andere optimale Lösungen beliebig nahe beieinander, wenn man den Abstand zweier Lösungen mit der L^2-Norm misst. Wie lautet das Ergebnis, wenn man die L^∞-Norm zugrundelegt?

b) Wir untersuchen das Optimierungsproblem

$$\min f(u) := \int_0^1 \big(u^2(x) - 1\big)^2\,\mathrm{d}x\,, \quad |u(x)| \le 1\,, \quad u \in L^\infty(0,1)\,.$$

Zeigen Sie, dass dieses Problem überabzählbar viele verschiedene global optimale Lösungen besitzt. Zudem liegen in jeder Umgebung einer optimalen Lösung überabzählbar viele andere optimale Lösungen beliebig nahe beieinander, wenn man den Abstand zweier Lösungen mit der L^2-Norm misst. Wie lautet das Ergebnis, wenn man die L^∞-Norm zugrundelegt?