Prof. Dr. H. J. Pesch
Lehrstuhl für Ingenieurmathematik
Universität Bayreuth

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen
Optimal Control of Partial Differential Equations
(Teil 1: WS 2011/12)

16. Übung

Vorbemerkung:

Wir verlassen mit diesem Übungsblatt die bisherige lineare Welt unserer Modellprobleme und nähern uns den semilinearen elliptischen Problemen. Zuvor müssen wir jedoch die Hürde „Nemytskii-Operator“ nehmen und uns mit Fragen seiner Fréchet-Differenzierbarkeit beschäftigen. Dazu muss die einen Nemytskii-Operator erzeugende reelwertige Funktion selbstverständlich gewisse Glattheitseigenschaften besitzen.

Alle Aufgaben entstammen dem Buch von F. Tröltzsch; Seite 200.

1) Glattheitsvoraussetzungen an die Erzeugende eines Nemytskii-Operators.

Es sei $E \subset \mathbf{R}^N$, $N \in \mathbf{N}$, $N \geq 2$, eine beschränkte, messbare Menge und $\varphi\colon E \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine Carathéodory-Funktion, d. h. φ sei für jedes feste $y \in \mathbf{R}$ messbar in x und für fast alle festen $x \in E$ stetig in y. Dann heißt die Abbildung Φ, $\Phi(y) := \varphi(\cdot, y(\cdot))$, die einer Funktion $y\colon E \to \mathbf{R}$ die durch $z(x) := \varphi(x, y(x))$ definierte Funktion $z\colon E \to \mathbf{R}$ zuordnet, Nemytskii-Operator.

Nun sei die Erzeugende φ für fast alle $x \in E$ k-mal partiell nach y differenzierbar. Wir sagen, dass die Funktion φ die Beschränktheitsbedingung der Ordnung k erfüllt, wenn es eine Schranke K gibt, so dass

$$|D_y^l \varphi(x, 0)| \leq K$$

für fast alle $x \in E$ and alle $l = 0, \ldots, k$ gilt. Sie genügt der lokalen Lipschitzbedingung der Ordnung k, wenn eine von M abhängige Lipschitzkonstante $L = L(M)$ existiert, so dass

$$|D_y^k \varphi(x, y_1) - D_y^k \varphi(x, y_2)| \leq L(M)\, |y_1 - y_2|$$

für alle $y_i \in \mathbf{R}$ mit $|y_i| \leq M$, $i = 1, 2$, erfüllt.

a) Wenn φ nur von der Funktionsvariablen y abhängt, sind die beiden obigen Bedingungen äquivalent zur lokalen Lipschitzbedingung von $\varphi^{(k)}$, d. h.

$$|\varphi^{(k)}(y_1) - \varphi^{(k)}(y_2)| \leq L(M)\,|y_1 - y_2|$$

für alle $y_i \in \mathbf{R}$ mit $|y_i| \leq M$, $i = 1, 2$.

b) Aus den beiden obigen Bedingungen folgt die lokale Beschränktheit sowie lokale Lipschitzstetigkeit aller Ableitungen bis zur Ordnung k, d. h. es existieren nur von M abhängige Konstanten $K(M)$ und $\bar{L}(M)$, so dass

$$|D_y^l \varphi(x, y)| \leq K(M)\,, \quad l = 0, \ldots, k\,,$$

$$|D_y^l \varphi(x, y_1) - D_y^l \varphi(x, y_2)| \leq \bar{L}(M)\,|y_1 - y_2|\,, \quad l = 0, \ldots, k\,,$$

für alle y mit $|y| \leq M$ bzw. alle $y_i \in \mathbf{R}$ mit $|y_i| \leq M$, $i = 1, 2$.

2) Fréchet-Differenzierbarkeit des Nemytskii-Operators $y(\cdot) \mapsto \sin(y(\cdot))$.

a) Beweisen Sie, dass der Nemytskii-Operator $y(\cdot) \mapsto \sin(y(\cdot))$ in keinem $L^p(E)$ mit $1 \leq p < \infty$ Fréchet-differenzierbar ist.

Hinweis: Die erforderliche Eigenschaft des Restgliedes ist schon für Treppenfunktionen nicht erfüllt.

b) Es sei $E \subset \mathbb{R}^N$ eine beschränkte und messbare Menge.

Für welche Räume $L^q(E)$ ist der Nemytskii-Operator $y(\cdot) \mapsto \sin(y(\cdot))$ Fréchet-differenzierbar von $L^2(E)$ nach $L^q(E)$?

Hinweis: Beachten Sie, dass ein Nemytskii-Operator automatisch stetig ist, wenn er für $q < \infty$ überhaupt $L^p(E)$ in $L^q(E)$ abbildet; siehe Appell, J., Zabrejko, P. P.: *Nonlinear Superposition Operators*, Cambridge University Press, 1990.

c) Es sei wiederum $E \subset \mathbb{R}^N$ eine beschränkte und messbare Menge.

Zeigen Sie allgemeiner, dass dieser Operator Fréchet-differenzierbar von $L^{p_1}(E)$ nach $L^{p_2}(E)$ ist, wenn $1 \leq p_2 < p_1 \leq \infty$ ist. (Dies schließt das Ergebnis der Teilaufgabe b) ein!)

Hinweis: Nach Lemma 4.10[1] der Vorlesung ist der Nemytskii-Operator $y(\cdot) \mapsto \sin(y(\cdot))$ Fréchet-differenzierbar in $L^\infty(E)$.

[1] gleiche Nummer wie in Tröltzschs Buch.