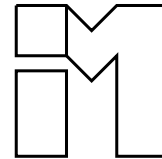




Prof. Dr. H. J. Pesch  
Lehrstuhl für Ingenieurmathematik  
Universität Bayreuth



## Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen Optimal Control of Partial Differential Equations (Teil 1: WS 2011/12)

16. Übung

### Vorbemerkung:

Wir verlassen mit diesem Übungsblatt die bisherige lineare Welt unserer Modellprobleme und nähern uns den semilinearen elliptischen Problemen. Zuvor müssen wir jedoch die Hürde „Nemytskii-Operator“ nehmen und uns mit Fragen seiner Fréchet-Differenzierbarkeit beschäftigen. Dazu muss die einen Nemytskii-Operator erzeugende reelwertige Funktion selbstverständlich gewisse Glattheitseigenschaften besitzen.

Alle Aufgaben entstammen dem Buch von F. Tröltzsch; Seite 200.

### 1) Glattheitsvoraussetzungen an die Erzeugende eines Nemytskii-Operators.

Es sei  $E \subset \mathbf{R}^N$ ,  $N \in \mathbf{N}$ ,  $N \geq 2$ , eine beschränkte, messbare Menge und  $\varphi: E \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  eine Carathéodory-Funktion, d. h.  $\varphi$  sei für jedes feste  $y \in \mathbf{R}$  messbar in  $x$  und für fast alle festen  $x \in E$  stetig in  $y$ . Dann heißt die Abbildung  $\Phi$ ,  $\Phi(y) := \varphi(\cdot, y(\cdot))$ , die einer Funktion  $y: E \rightarrow \mathbf{R}$  die durch  $z(x) := \varphi(x, y(x))$  definierte Funktion  $z: E \rightarrow \mathbf{R}$  zuordnet, Nemytskii-Operator.

Nun sei die Erzeugende  $\varphi$  für fast alle  $x \in E$   $k$ -mal partiell nach  $y$  differenzierbar. Wir sagen, dass die Funktion  $\varphi$  die Beschränktheitsbedingung der Ordnung  $k$  erfüllt, wenn es eine Schranke  $K$  gibt, so dass

$$|D_y^l \varphi(x, 0)| \leq K$$

für fast alle  $x \in E$  and alle  $l = 0, \dots, k$  gilt. Sie genügt der lokalen Lipschitzbedingung der Ordnung  $k$ , wenn eine von  $M$  abhängige Lipschitzkonstante  $L = L(M)$  existiert, so dass

$$|D_y^k \varphi(x, y_1) - D_y^k \varphi(x, y_2)| \leq L(M) |y_1 - y_2|$$

für alle  $y_i \in \mathbf{R}$  mit  $|y_i| \leq M$ ,  $i = 1, 2$ , erfüllt.

- a) Wenn  $\varphi$  nur von der Funktionsvariablen  $y$  abhängt, sind die beiden obigen Bedingungen äquivalent zur lokalen Lipschitzbedingung von  $\varphi^{(k)}$ , d. h.

$$|\varphi^{(k)}(y_1) - \varphi^{(k)}(y_2)| \leq L(M) |y_1 - y_2|$$

für alle  $y_i \in \mathbf{R}$  mit  $|y_i| \leq M$ ,  $i = 1, 2$ .

- b) Aus den beiden obigen Bedingungen folgt die lokale Beschränktheit sowie lokale Lipschitzstetigkeit aller Ableitungen bis zur Ordnung  $k$ , d. h. es existieren nur von  $M$  abhängige Konstanten  $K(M)$  und  $\bar{L}(M)$ , so dass

$$|D_y^l \varphi(x, y)| \leq K(M), \quad l = 0, \dots, k,$$

$$|D_y^l \varphi(x, y_1) - D_y^l \varphi(x, y_2)| \leq \bar{L}(M) |y_1 - y_2|, \quad l = 0, \dots, k,$$

für alle  $y$  mit  $|y| \leq M$  bzw. alle  $y_i \in \mathbf{R}$  mit  $|y_i| \leq M$ ,  $i = 1, 2$ .

**2) Fréchet-Differenzierbarkeit des Nemytskii-Operators  $y(\cdot) \mapsto \sin(y(\cdot))$ .**

- a) Beweisen Sie, dass der Nemytskii-Operator  $y(\cdot) \mapsto \sin(y(\cdot))$  in keinem  $L^p(E)$  mit  $1 \leq p < \infty$  Fréchet-differenzierbar ist.

*Hinweis:* Die erforderliche Eigenschaft des Restgliedes ist schon für Treppenfunktionen nicht erfüllt.

- b) Es sei  $E \subset \mathbb{R}^N$  eine beschränkte und messbare Menge.

Für welche Räume  $L^q(E)$  ist der Nemytskii-Operator  $y(\cdot) \mapsto \sin(y(\cdot))$  Fréchet-differenzierbar von  $L^2(E)$  nach  $L^q(E)$ ?

*Hinweis:* Beachten Sie, dass ein Nemytskii-Operator automatisch stetig ist, wenn er für  $q < \infty$  überhaupt  $L^p(E)$  in  $L^q(E)$  abbildet; siehe Appell, J., Zabrejko, P. P.: *Nonlinear Superposition Operators*, Cambridge University Press, 1990.

- c) Es sei wiederum  $E \subset \mathbb{R}^N$  eine beschränkte und messbare Menge.

Zeigen Sie allgemeiner, dass dieser Operator Fréchet-differenzierbar von  $L^{p_1}(E)$  nach  $L^{p_2}(E)$  ist, wenn  $1 \leq p_2 < p_1 \leq \infty$  ist. (Dies schließt das Ergebnis der Teilaufgabe b) ein!)

*Hinweis:* Nach Lemma 4.10<sup>1</sup> der Vorlesung ist der Nemytskii-Operator  $y(\cdot) \mapsto \sin(y(\cdot))$  Fréchet-differenzierbar in  $L^\infty(E)$ .

---

<sup>1</sup>gleiche Nummer wie in Tröltzschs Buch.