Prof. Dr. H. J. Pesch
Lehrstuhl für Ingenieurmathematik
Universität Bayreuth

# Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen
# Optimal Control of Partial Differential Equations
## (Teil 1: WS 2011/12)

15. Übung

**Vorbemerkung:**

Mit diesem Übungsblatt wenden wir uns wieder elliptischen Optimalsteuerungsproblemen zu, zunächst noch einmal den linear-quadratischen, jedoch aus einem anderen Blickwinkel. Wir betrachten hierbei die Nebenbedingung als eine Gleichung im Dualraum $V^* := (H^1(\Omega))^*$.

### 1) Elliptische Gleichungen mit Daten aus $V^*$.

Alle bisher behandelten elliptischen Randwertprobleme wurden mit der Theorie schwacher Lösungen auf die allgemeine Form

$$a[y, v] = F(v)$$

gebracht, in der $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine stetige, koerzive Bilinearform und $F$ ein Funktional aus $V^*$ ist.

Wir betrachten die Bilinearform jetzt aus etwas anderer Sicht. Für fest vorgegebenes $y \in V$ und variables $v \in V$ ist die Abbildung $V \to \mathbb{R}$ vermöge $v \mapsto a[y, v]$ linear und stetig und somit ein von $y$ abhängiges Element aus $V^*$. Wir nennen es $A\,y$. Der Operator $A\colon V \to V^*$ vermöge $y \mapsto A\,y$ ist offensichtlich auch linear.

**a)** Man zeige: $A$ ist stetig.

**b)** Man zeige: Die Gleichung $A\,y = F$ hat für jedes $F \in V^*$ genau eine Lösung, und es gilt

$$\|y\|_V \le c_a\,\|F\|_{V^*}\,.$$

Man zeige, der inverse Operator $A^{-1}\colon V^* \to V$ existiert und ist stetig.

**c)** Wie lautet für das Optimalsteuerungsproblem der optimalen stationären Randtemperatur

$$\min_{u \in U_{\mathrm{ad}}} J(y,u) := \frac{1}{2}\|y - y_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\,\|u\|^2_{L^2(\Gamma)}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta y &= 0 && \text{in } \Omega\,,\\ \partial_\nu y + \alpha\, y &= u && \text{auf } \Gamma\,,\\ u \in U_{\mathrm{ad}} &:= \{u \in L^2(\Gamma) \colon |u| \leq 1\}\,, \end{aligned}$$

die $A\,y = F$ entsprechende Gleichung in $V^* = (H^1(\Omega))^*$?

Man zeige, dass man diese Gleichung auch schreiben kann als $A\,y = B\,u$ mit einem geeignetem Operator $B$.

**d)** Man zeige: Für die optimale Lösung $(\bar y, \bar u)$ des obigen Optimalsteuerungsproblems gilt

$$\left(B^*\,S^*\,(\bar y - y_\Omega) + \lambda\,\bar u, u - \bar u)\right)_{L^2(\Gamma)} \geq 0 \quad \forall u \in U_{\mathrm{ad}}$$

mit einem geeignet definierten Lösungsoperator $S\colon V^* \to L^2(\Omega)$ der Randwertaufgabe.

**e)** Man zeige: Der adjungierte Zustand $p := S^*\,(\bar y - y_\Omega)$ löst die Gleichung

$$A^*\,p = E_V^*\,(\bar y - y_\Omega)\,,$$

wobei $E_V$ den Einbettungsoperator von $V$ nach $L^2(\Omega)$ bezeichnet. Der adjungierte Zustand $p$ ist überdies Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta p &= \bar y - y_\Omega && \text{in } \Omega\,,\\ \partial_\nu p + \alpha\, p &= 0 && \text{auf } \Gamma\,. \end{aligned}$$

**f)** Man zeige:

$$(\tau\, p + \lambda\,\bar u, u - \bar u)_{L^2(\Gamma)} \geq 0 \quad \forall u \in U_{\mathrm{ad}}\,.$$

Hierbei bezeichnet $\tau$ den Spuroperator von $V$ nach $L^2(\Gamma)$.

**g)** Man zeige: Mit der Lagrangefunktion $\mathcal{L}\colon V \times U \times V^{**} \to \mathbb{R}$, definiert vermöge

$$\mathcal{L}(y,u,z^*) = J(y,u) + (z^*, B\,u - A\,y)_{V^{**},V^*}\,,$$

muss für ein Minimum von $\mathcal{L}$ in $(\bar y, \bar u)$ gelten:

$$D_{(y,u)}\mathcal{L}(\bar y, \bar u, p)\,(y - \bar y, u - \bar u) \geq 0\,.$$

Man leite daraus eine Bestimmungsgleichung für $p$ und eine Variationsungleichung für $u$ her.

**h)** Man schreibe die semilineare elliptische Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta y + y + y^k &= u\,,\ k = 3\,,\ 5\,, && \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^N\,,\ N = 2,\,3\,, \\ \partial_\nu y &= 0 && \text{auf } \Gamma = \partial\Omega \end{aligned}$$

mithilfe eines geeigneten Nemyzki-Operators um in eine Gleichung in $V^*$ des Typs

$$A\,y + B\,\Phi(y) = B\,u$$

und gebe für den Nemyzki-Operator $\Phi$ Urbild und Bildraum an.

*Hinweis:* Man unterscheide die Fälle $N = 2$ und $N = 3$ und verwende hierbei den Einbettungssatz für Sobolewräume:

Einbettungssatz: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Es sei $1 < p < \infty$ sowie $m \geq 0$ eine ganze Zahl. Dann sind die folgenden Einbettungen definiert und stetig:

$$\begin{aligned} &\text{bei } m\,p < N: && W^{m,p} \hookrightarrow L^q(\Omega)\,, && \forall \quad 1 \leq q \leq \frac{N\,p}{N - m\,p}\,, \\ &\text{bei } m\,p = N: && W^{m,p} \hookrightarrow L^q(\Omega)\,, && \forall \quad 1 \leq q < \infty\,, \\ &\text{bei } m\,p > N: && W^{m,p} \hookrightarrow C(\bar{\Omega})\,. && \end{aligned}$$

Siehe: R. A. Adams: *Sobolev Spaces*. Boston: Academic Press, 1978, Satz 5.4, S. 97ff.

## 2) Und zu guter Letzt: Taylorformel mit integralem Restglied.

Man zeige, für jede reellwertige $C^1$-Funktion $f$ über einem kompakten Intervall gilt

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\,h + R(x,h)$$

mit Restglied

$$R(x,h) = h \int_0^1 \big[f'(x + s\,h) - f'(x)\big]\,\mathrm{d}s\,.$$