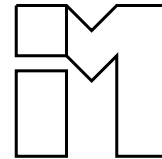




Prof. Dr. H. J. Pesch
Lehrstuhl für Ingenieurmathematik
Universität Bayreuth



Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen Optimal Control of Partial Differential Equations (Teil 1: WS 2011/12)

13. Übung (spezielle neuartige Problemstellungen)

Vorbemerkung:

In diesem „Spezialübungsblatt“ sollen Probleme untersucht werden, die bisher noch kaum oder nicht untersucht worden sind: Mit der Verallgemeinerung von zeitoptimalen Steuerungsproblemen und Problemen mit bang-bang und singulären Steuerungen aus der Optimalen Steuerung von gewöhnlichen Differentialgleichungen am Beispiel des van der Polschen Oszillators (Übung 12) auf semilineare elliptische Optimalsteuerungsprobleme betreten wir mit den Aufgaben 1 und 2 weitestgehend Neuland.

In Aufgabe 1 wird ein einfaches Shape-Optimalsteuerungsproblem behandelt. Kombinationen aus Optimalen Steuerungsaufgaben und Shape-Optimierungsproblemen wurden bisher noch nicht untersucht, obwohl solche Aufgabenstellungen für praktische Problemstellungen durchaus sinnvoll, ja sogar hoch relevant sind, z.B. simultane Gestalt-Optimierung flexibler Flugzeugtragflächen mithilfe von Gedächtnismaterialien und Steuerung von Düsen, mit denen Luft aus den Tragflächen ausgeblasen oder eingesaugt werden kann mit dem Ziel, möglichst laminare Umströmungen der Tragflächen zu erhalten.

In Aufgabe 2 wird ein neues Optimalsteuerungsproblem vorgestellt, für das eine singuläre Steuerung numerisch nachweisbar ist.

1) Der „zeitminimale elliptische van der Pol-Oszillator“: Notwendige Bedingungen

Es sei $\Omega := (0, T)^2$ mit freiem Rand $T > 0$. Der Rand Γ von Ω sei wie folgt partitioniert: $\Gamma = \Gamma_{\text{SW}} \cup \Gamma_{\text{NE}}$ mit $\Gamma_{\text{SW}} := \{(x, 0), x \in [0, T]\} \cup \{(0, y), y \in [0, T]\}$ und $\Gamma_{\text{NE}} := \{(x, T), x \in]0, T]\} \cup \{(T, y), y \in]0, T]\}$.

Auf Ω sei nun das folgende semilineare elliptische Optimalsteuerungsproblem definiert, auch interpretierbar als Shape-Optimalsteuerungsproblem:

$$\min_{|v| \leq 1} J(z, v) = \min_{|v| \leq 1} T + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma_{\text{NE}}} (z - r)^2 \, ds, \quad \varepsilon > 0, \quad (1)$$

unter der Nebenbedingung

$$\begin{aligned} -\Delta z + (1 - z^2)(z_x + z_y) - z &= v && \text{auf } \Omega, \\ z = 0, \quad \partial_\nu z &= 1 && \text{auf } \Gamma_{\text{SW}}, \\ \partial_\nu z &= 0 && \text{auf } \Gamma_{\text{NE}}. \end{aligned}$$

Mithilfe der formalen Lagrangetechnik stelle man die notwendigen Bedingungen auf. Insbesondere leite man eine Bedingung zur Bestimmung des freien Randes T her. Man analysiere, ob Gebiete mit singulärer Steuerung auftreten können.

Hinweise:

1. Bei der Anwendung der formalen Lagrangetechnik gehe man im Allgemeinen so vor: Man stelle die Lagrangefunktion für die starke Form der partiellen Differentialgleichung auf und kopple alle *wesentlichen* Nebenbedingungen an. Dann integriere man partiell und substituiere, wenn möglich, vorgegebene Randbedingungen. Dies ist die sogenannte *schwache Form der Lagrangefunktion*; sie ist hinsichtlich der Regularität des Zustandes die mathematisch korrekte Form. Dann differenziere man nach den Optimierungsvariablen. Zum Ablesen der adjungierten Gleichung empfiehlt es sich, eine nochmalige partielle Integration durchzuführen, um deren starke Form auszulesen. Dabei werden die nicht in die herausintegrierten Bestandteile substituierten Randbedingungen in den Raum der Testfunktionen eingearbeitet.

Alternativ kann man auch die letzte partielle Integration und die Differentiationen vertauschen. Man geht dann von der sogenannten *sehr schwachen Form der Lagrangefunktion* aus.

Im Zweifelsfall kopple man alle Nebenbedingungen an; siehe dazu Übungsblatt 14. Dann erhält man zusätzliche Nebenbedingungen, die sich als Spuren des adjungierten Zustandes oder seiner Ableitungen auf dem Rand interpretieren lassen.

2. Für die Bestimmung des freien Randes leite man zunächst eine Differentiationsformel für

$$\frac{d}{dT} \int_0^T \int_0^T f(x, y) \, dx \, dy$$

her

2) Der optimal gedämpfte „elliptische van der Pol-Oszillator“ als Beispiel für ein Optimalsteuerungsproblem mit einer singulären Steuerung

Es sei $\Omega := (0, T)^2$ mit festem Rand $T = \text{const} > 0$. Der Rand Γ von Ω sei wie folgt partitioniert: $\Gamma = \Gamma_N \cup \Gamma_E \cup \Gamma_S \cup \Gamma_W$ mit $\Gamma_N := \{(x, T), x \in [0, T]\}$, $\Gamma_E := \{(T, y), y \in [0, T]\}$, $\Gamma_S := \{(x, 0), x \in [0, T]\}$ und $\Gamma_W := \{(0, y), y \in [0, T]\}$. Wir fassen auch Teilbögen zusammen, z. B. $\Gamma_{NS} = \Gamma_N \cup \Gamma_S$ u. ä.

Gegeben sei wieder das folgende quasilineare elliptische Optimalsteuerungsproblem

$$\min_{|v| \leq 1} J(z, v) = \min_{|v| \leq 1} \frac{1}{2} \int_{\Omega} z^2 + z_x^2 + z_y^2 \, dx \, dy \quad (2)$$

unter der Nebenbedingung

$$\begin{aligned} -\Delta z + (1 - z^2)(z_x + z_y) - z &= v && \text{auf } \Omega, \\ z = 0, \quad \partial_\nu z &= 1 && \text{auf } \Gamma_W, \\ \partial_\nu z &= 0 && \text{auf } \Gamma_{NS}. \end{aligned}$$

- a) Mithilfe der formalen Lagrangetechnik stelle man die notwendigen Bedingungen auf.

Hinweis:

$$\int_{\Omega} \text{div } \vec{v} p \, dx \, dy = \int_{\Gamma} p \vec{v} \cdot \nu \, ds - \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \nabla p \, dx \, dy$$

- b) Man bestimme die mögliche singuläre Steuerung in Gebieten $\omega \subset \Omega$, $\omega \neq \emptyset$, in denen der adjungierte Zustand p identisch verschwindet.

Numerische Resultate: Beispiel 1 (Aufgabe 1: „Pseudo-PDE“)

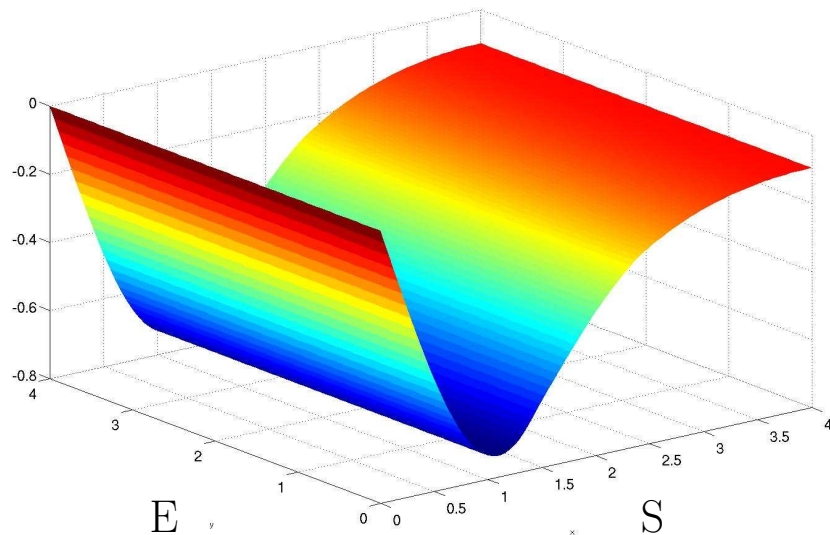


Abbildung 1: Zustand z . Daten wie in Aufgabe 1: $z = 0$ und $\partial_\nu z = 1$ auf Γ_W und $\partial_\nu z = 0$ auf Γ_{NS}

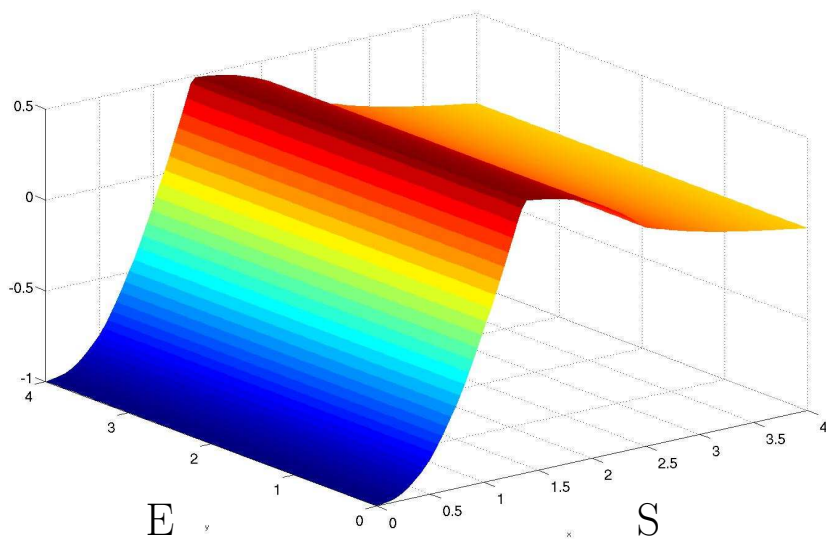


Abbildung 2: Zustand z_x . Daten wie in Aufgabe 1: $z = 0$ und $\partial_\nu z = 1$ auf Γ_W und $\partial_\nu z = 0$ auf Γ_{NS}

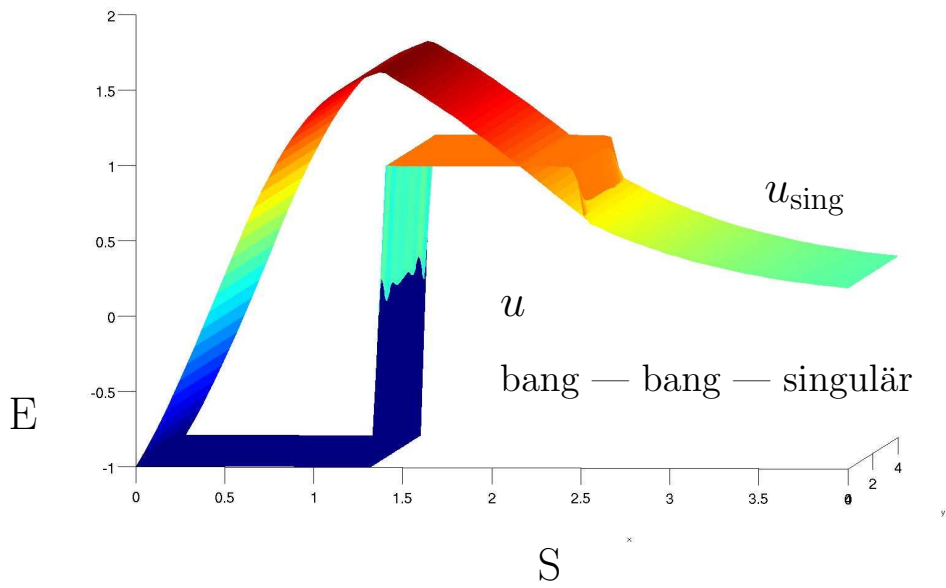


Abbildung 3: Steuerung u und singuläre Steuerung u_{sing} . Daten wie in Aufgabe 1: $z = 0$ und $\partial_\nu z = 1$ auf Γ_W und $\partial_\nu z = 0$ auf Γ_{NS}

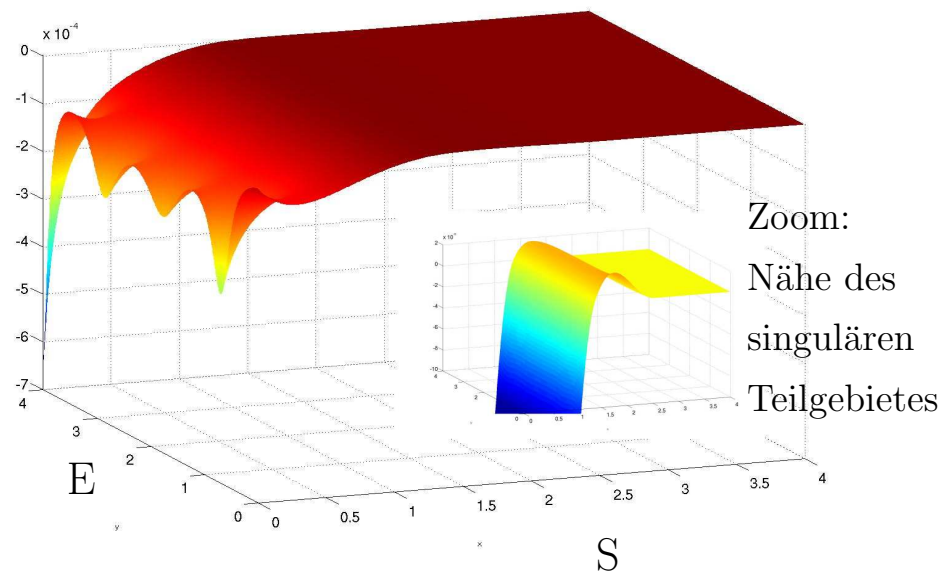


Abbildung 4: Negativer adjungierter Zustand $-p$. Daten wie in Aufgabe 1: $z = 0$ und $\partial_\nu z = 1$ auf Γ_W und $\partial_\nu z = 0$ auf Γ_{NS}

Beispiel 2 (Aufgabe 2):

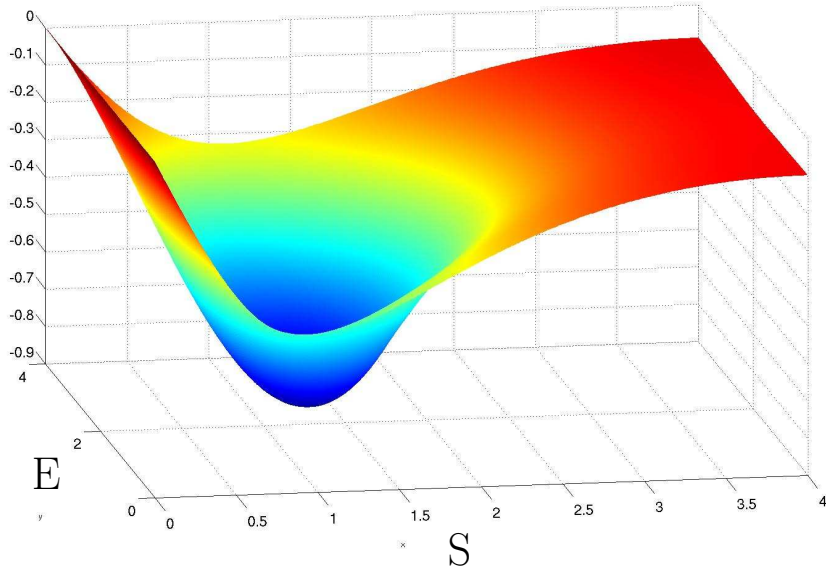


Abbildung 5: Zustand z . Daten wie in Aufgabe 2: $z = 0$ und $\partial_\nu z = 1$ auf $\{(0, y) : 0.4 \leq y \leq 0.6\}$ auf Γ_W und $\partial_\nu z = 0$ auf Γ_{NES}

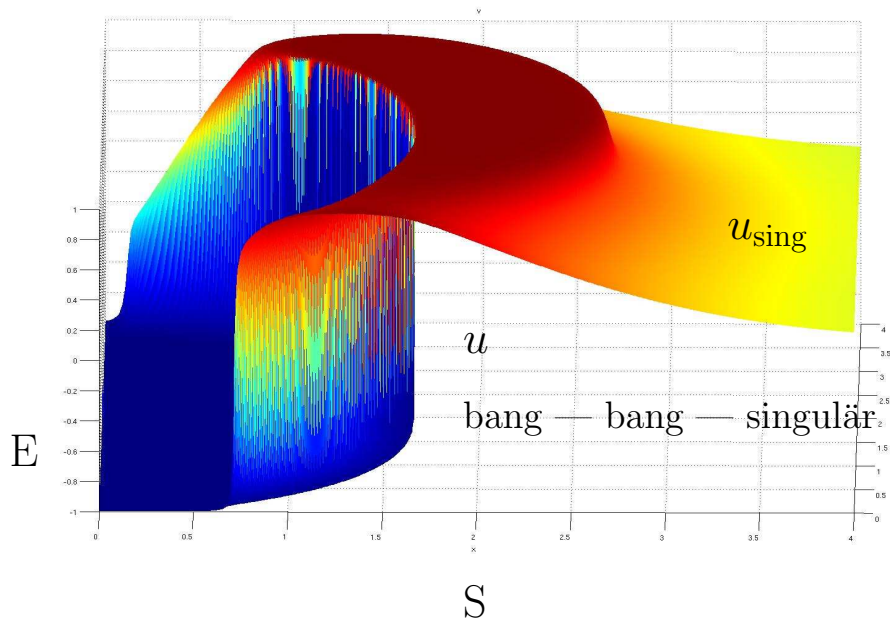


Abbildung 6: Steuerung u . Daten wie in Aufgabe 2: $z = 0$ und $\partial_\nu z = 1$ auf $\{(0, y) : 0.4 \leq y \leq 0.6\}$ auf Γ_W und $\partial_\nu z = 0$ auf Γ_{NES}

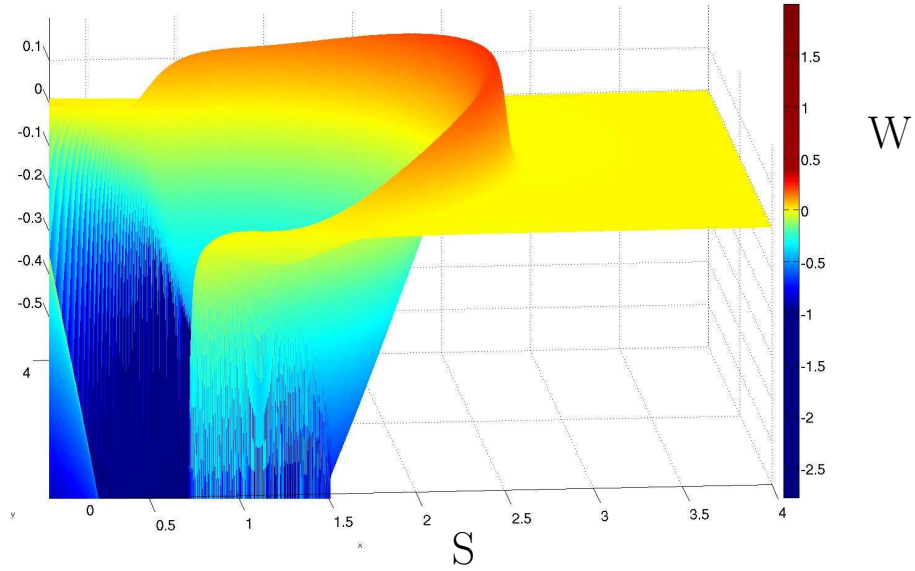


Abbildung 7: Differenz $u - u_{\text{sing}}$. Daten wie in Aufgabe 2: $z = 0$ und $\partial_\nu z = 1$ auf $\{(0, y) : 0.4 \leq y \leq 0.6\}$ auf Γ_W und $\partial_\nu z = 0$ auf Γ_{NES}

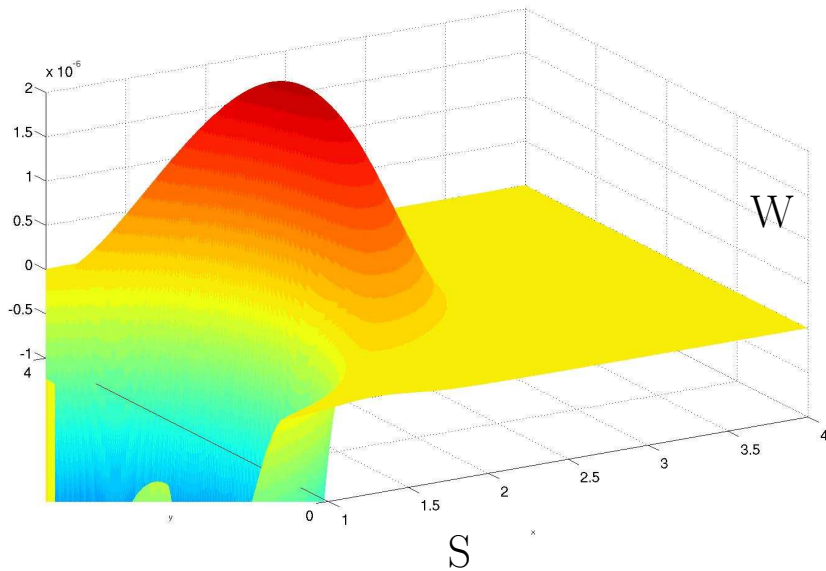


Abbildung 8: Negativer adjungierter Zustand $-p$ (Zoom). Daten wie in Aufgabe 2: $z = 0$ und $\partial_\nu z = 1$ auf $\{(0, y) : 0.4 \leq y \leq 0.6\}$ auf Γ_W und $\partial_\nu z = 0$ auf Γ_{NES}