Prof. Dr. H. J. Pesch
Lehrstuhl für Ingenieurmathematik
Universität Bayreuth

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen
Optimal Control of Partial Differential Equations
(Teil 1: WS 2011/12)

12. Übung („Optimale Steuerung bei gewöhnlichen Differentialgleichungen“)

Vorbemerkung:

Mit diesem Übungsblatt soll der Weg zur Lösung von speziellen Optimalsteuerungsproblemen mit partiellen Differentialgleichungen geebnet werden, die bisher noch kaum untersucht worden sind. Insbesondere wollen wir uns im nächsten Übungsblatt elliptische Probleme mit freiem Rand und mit singulären Steuerungen ansehen. Probleme mit freiem Rand wie zeitminimale Optimalsteuerungsprobleme oder Probleme mit singulären Steuerungen sind bei Optimalsteuerungsproblemen mit gewöhnlichen Differentialgleichungen dagegen relativ gut untersucht worden.

Deshalb gehen wir zunächst historisch zurück und betrachten Optimalsteuerungsprobleme mit gewöhnlichen Differentialgleichungen. Wir werden sehen, dass wir diese auch mithilfe der formalen Lagrangetechnik angehen können und werden dann diese Vorgehensweise durch Vergleich mit der Anwendung der fundamentalen notwendigen Bedingung der Optimalsteuerungstheorie für gewöhnliche Differentialgleichungen, dem berühmten Minimumprinzips von Pontrjagin et. al. (1955), mathematisch streng rechtfertigen.

Die verschiedenen Phänomene werden wir alle anhand des van der Polschen Oszillators studieren:

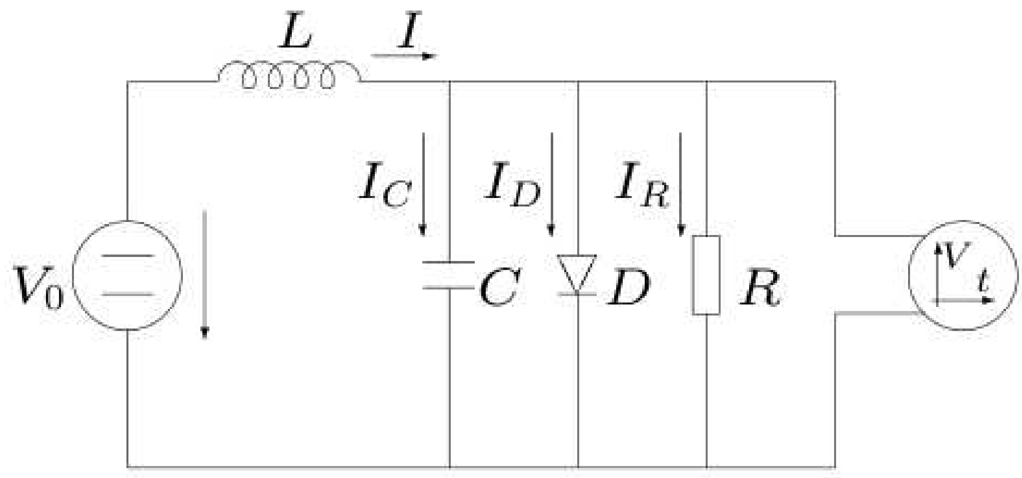
$$\ddot{x}(t) - \varepsilon \left(1 - x(t)^2\right) \dot{x}(t) + x(t) = 0\,, \quad \varepsilon \geq 0\,.$$

Eine geschlossene Lösung dieser nichtlinearen Differentialgleichung existiert im übrigen nicht.

Aus Wikipedia: *Der Van-der-Pol-Oszillator ist ein schwingungsfähiges System mit nichtlinearer Dämpfung und Selbsterregung. Für kleine Amplituden ist die Dämpfung negativ (die Amplitude wird vergrößert). Ab einem bestimmten Schwellwert der Amplitude wird die Dämpfung positiv, das System stabilisiert sich und geht in einen Grenzzyklus über.*[1]

[1] Benannt nach dem niederländischen Physiker Balthasar van der Pol (1889–1959), der das Modell 1927 als Ergebnis seiner Forschungen an Oszillatoren mit Vakuumröhren vorstellte.

1) Der ungeregelte van der Pol-Oszillator: Qualitative Analyse



$x(t) = V(t)$ Spannung $\qquad u(t) = V_0(t)$ Steuerung

Abbildung 1: Schaltbild zum van der Polschen Oszillator

Gegeben sei die homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung des freien van der Polschen Oszillators

$$\ddot{x} - (1 - x^2)\,\dot{x} + x = 0\,,$$
$$x(0) = 1\,, \quad \dot{x}(0) = 1\,.$$

a) Man bestimme die Gleichgewichtspunkte des autonomen zweidimensionalen Differentialgleichungssystems für $(x, y) := (x, \dot{x})$ und untersuche sein Stabilitätsverhalten um die Gleichgewichtspunkte.

b) Man weise die Existenz eines Grenzzyklus nach.

Hinweis: Man verwende den folgenden auf die verallgemeinerte Liénardsche Gleichung

$$\ddot{x} + f(x)\,\dot{x} + g(x) = 0$$

zugeschnittenen Satz; siehe z. B. Heuser, H.: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Teubner, Stuttgart, 1989, S. 559:

Die Funktionen f und g in der verallgemeinerten Liénardschen Gleichung mögen die folgenden Bedingungen erfüllen:

a) f und g sind auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar;

b) f ist eine gerade, g eine ungerade Funktion;

c) $f(0) < 0$, $g(x) > 0$ für alle $x > 0$;

d) zu der Funktion

$$F(x) := \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s\,,\ \ x \in \mathbb{R}\,,$$

gibt es ein $a > 0$, so dass folgendes gilt:

$$F(x) < 0 \text{ für } 0 < x < a\,, \quad F(a) = 0\,, \quad F(x) > 0 \text{ für } x > a\,,$$

$$F \text{ ist auf } [a, \infty) \text{ monoton wachsend;}$$

e) $F(x) \to \infty$ für $x \to \infty$.

Dann besitzt die verallgemeinerte Liénhardsche Gleichung, d. h. das zugehörige System

$$\dot{x} = y\,, \quad \dot{y} = -f(x)\,y - g(x)$$

genau einen Grenzzyklus. Er läuft um $(0,0)$, und jede andere (nichtdegenerierte) Trajektorie schmiegt sich ihm für $t \to \infty$ spriralförmig an.

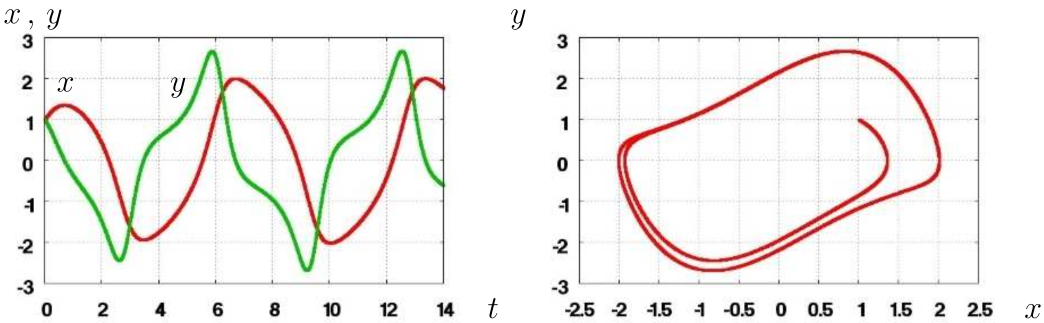


Abbildung 2: Trajektorien $x(t)$ (rot), $y(t)$ (grün) links, Phasenbahn (rot) rechts

Bemerkung: Beim gestörten van der Polschen Oszillator

$$\ddot{x}(t) - \varepsilon\,\left(1 - x(t)^2\right)\,\dot{x}(t) + x(t) = F(t)\,, \quad \varepsilon \geq 0\,.$$

sind die Voraussetzungen des Theorems von Poincaré-Bendixson nicht mehr erfüllt; es kann deterministisches Chaos auftreten.

2) Der gesteuerte van der Pol-Oszillator: Notwendige Bedingungen

Wir betrachten im folgenden zwei Optimalsteuerungsprobleme für den van der Polschen Oszillator. Die Dynamik sei in beiden Fällen gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = y(t)\,,\\
&\dot{y}(t) = -x(t) + (1 - x(t)^2)\,y(t) + u(t)\,,\\
&-1 \le u(t) \le 1\,,\ 0 \le t \le t_f\,,\\
&x(0) = 1\,,\ y(0) = 1\,,\quad x(t_f)^2 + y(t_f)^2 = r^2\,.
\end{aligned}$$

Die beiden Zielfunktionale seien

$$J_1(x, y, u) := \frac{1}{2}\int_0^{t_f} x^2 + y^2 + u^2 \mathrm{d}t \quad \text{mit } t_f \text{ vorgegeben} \quad \text{und} \quad J_2(x, y, u) = t_f\,.$$

Das Zielfunktional J_1 beschreibt ein Regulator-Problem, das Zielfunktional J_2 den zeitoptimalen van der Pol-Oszillator.

a) Man bestimme mithilfe der formalen Lagrangetechnik die notwendigen Bedingungen für das Regulator-Problem mit fester Endzeit. Man gebe das Optimalitätssystem als wohl definiertes Randwertproblem an.

Hinweis: Die Endbedingung $x(t_f)^2 + y(t_f)^2 = r^2$ koppele man ebenfalls mithilfe eines Lagrangeparameters an.

b) Man bestimme mithilfe der formalen Lagrangetechnik die notwendigen Bedingungen für den zeitoptimalen van der Pol-Oszillator. Man gebe das Optimalitätssystem als wohl definiertes Randwertproblem über einem *festen* Intervall an.

c) Man leite die notwendigen Bedingungen für die beiden Probleme nochmals mithilfe des Minimumprinzips her. Man vergleiche die erhaltenen Optimalitätssysteme. Man diskutiere den Fall singulärer Extremalenbögen, wo die Minimumbedingung keine eindeutige Lösung liefert.

Hinweis: Das Minimumprinzip (Pontrjagin, Boltjanskij und Gamkrelidze, 1955) stellt die wichtigste notwendige Bedingung aus der Theorie der Optimalen Steuerung für gewöhnliche Differentialgleichungen dar. Wir zitieren sie hier für die folgende Grundaufgabe der Optimalen Steuerung bei autonomen gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\min_{u \in U_{\mathrm{ad}}} g(x(0), x(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} f_0(x(t), u(t))\,\mathrm{d}t$$

unter den Nebenbedingungen

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad 0 \le t \le t_f,$$
$$r(x(0), x(t_f), t_f) = 0 \in \mathbb{R}^s,$$
$$u(t) \in U_{\text{ad}} \subset \mathbb{R}^m, \quad U_{\text{ad}} \text{ konvex}.$$

Die Funktionen $g\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_0\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ und $r\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^s$ seien hinreichend oft stetig differenzierbar nach ihren Argumenten.

Mit der wie folgt definierten Hamiltonfunktion

$$H(x, p, u) := p_0\, f_0(x, u) + p^\top f(x, u)$$

lässt sich dann das Minimumprinzip (notwendige Bedingung) formulieren:

Es seien $(\bar{x}, \bar{u})$ und gegebenenfalls $\bar{t}_f$ eine optimale Lösung des obigen Optimalsteuerungsproblems. Dann gibt es eine Zahl $p_0 \ge 0$ und eine stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion $p\colon [0, \bar{t}_f] \to \mathbb{R}^n$ und einen Zeilenvektor $q \in \mathbb{R}^s$ mit $(p_0, p(t), q) \ne 0$ für alle $t \in [0, \bar{t}_f]$, so dass die folgenden Aussagen geltn:

(1) An allen Stetigkeitsstellen $t \in [0, \bar{t}_f]$ von $\bar{u}$ gelten die Minimumbedingungen

$$H(\bar{x}, p, \bar{u}) := \min_{u \in U_{\text{ad}}} H(\bar{x}, p, u),$$

(2) die adjungierte Gleichung

$$\dot{p}(t) = -H_x(\bar{x}, p, \bar{u})$$

(3) und die Transversalitätsbedingungen $\big(x_a$, x_b und t sind formale Variable für $g(x_a, x_b, t_f)$ und $r(x_a, x_b, t_f)\big)$

$$p(0) = -\frac{\partial}{\partial x_a}\left(g + q^\top r\right)(\bar{x}(0), \bar{x}(\bar{t}_f), \bar{t}_f),$$
$$p(\bar{t}_f) = \frac{\partial}{\partial x_b}\left(g + q^\top r\right)(\bar{x}(0), \bar{x}(\bar{t}_f), \bar{t}_f).$$

Ferner gilt im autonomen Fall $H(\bar{x}(\bar{t}_f), p(\bar{t}_f), \bar{u}(\bar{t}_f)) = \text{const}$ für alle $t \in [0, \bar{t}_f]$ und im Falle freier Endzeit zusätzlich noch

$$H(\bar{x}(\bar{t}_f), p(\bar{t}_f), \bar{u}(\bar{t}_f)) + \frac{\partial}{\partial t}\left(g + q^\top r\right)(\bar{x}(0), \bar{x}(\bar{t}_f), \bar{t}_f) = 0.$$

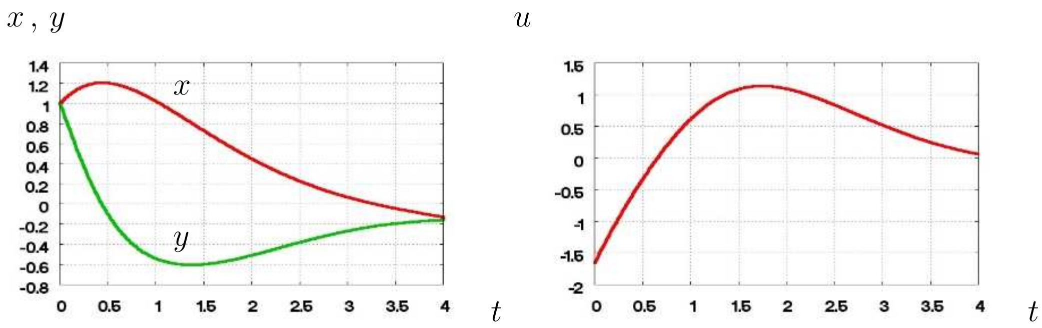


Abbildung 3: Zustände $x(t)$ (rot), $y(t)$ (grün) links, Steuerung $u(t)$ (rot) rechts für das Regulator-Problem (Zielfunktional J_1) zu den Daten $t_f = 4$ und $r = 0.2$. Lösung ohne Steuerungsbeschränkung

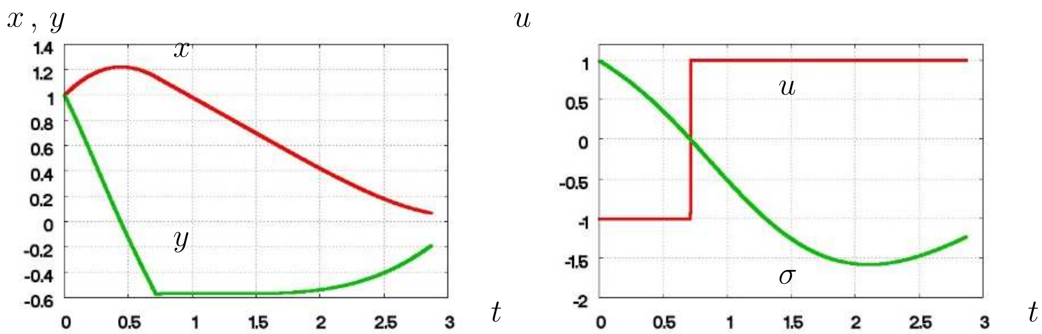


Abbildung 4: Zustände $x(t)$ (rot), $y(t)$ (grün) links, Steuerung $u(t)$ (rot) rechts, Schaltfunktion σ (grün) für den zeitoptimalen Oszillator (Zielfunktional J_2) zu dem Datum $r = 0.2$

3) Der gedämpfte van der Pol-Oszillator als Optimalsteuerungsproblem: Notwendige Bedingungen

Wir ändern noch einmal das Zielfunktional ab,

$$J_3(x, y, u) := \frac{1}{2} \int_0^{t_f} x(t)^2 + \dot{x}(t)^2 \, \mathrm{d}t \quad \text{mit } t_f \text{ vorgegeben,}$$

schreiben die van der Pol-Gleichung jetzt als Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x}(t) - \left(1 - x(t)^2\right) \dot{x}(t) + x(t) = u$$

und fordern die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $y(0) = 1$. Die Endbedingung entfällt.

Wie lauten nun die notwendigen Bedingungen? Insbesondere untersuche man den Fall, dass der adjungierte Zustand identisch verschwindet.

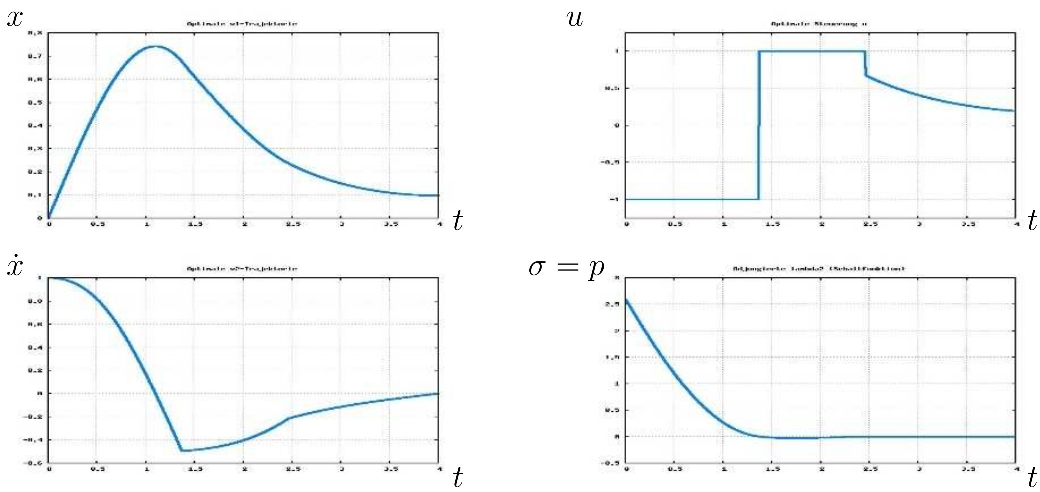


Abbildung 5: Zustände $x(t)$, $\dot{x}(t)$ links, Steuerung $u(t)$ vom Typ bang-singulär oben rechts, Schaltfunktion $\sigma = p_2$ unten rechts für den gedämpften Oszillator (Zielfunktional J_3) zu dem Datum $t_f = 4$

Bemerkung: Wenn man die in Aufgabe 2 formulierte Grundaufgabe noch um gemischte Beschränkungen der Form $C(x,u) \le 0$, $C_u \ne 0$, und reine Zustandsbeschränkungen der Form $S(x) \le 0$ erweitert, hat man bereits die allgemeine Aufgabenstellung der optimalen Steuerung bei gewöhnlichen Differentialgleichung erreicht.

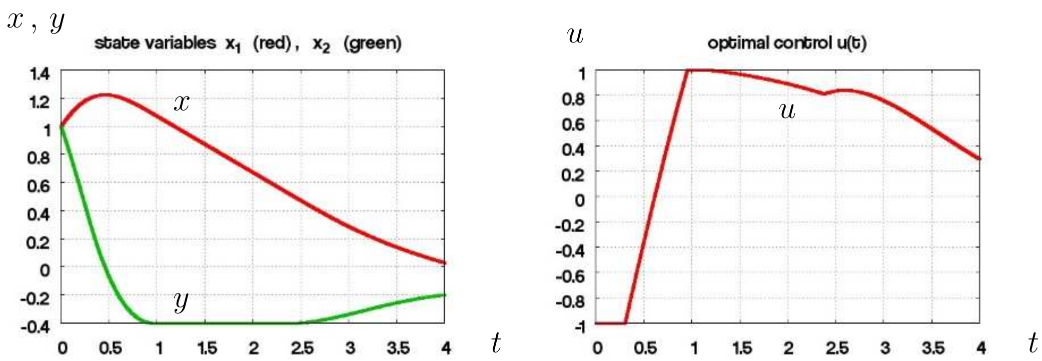


Abbildung 6: Zustände $x(t)$ (rot), $y(t)$ (grün) links, Steuerung $u(t)$ (rot) rechts, für das Regulator-Problem (Aufgabe 2a, Zielfunktional J_1) zu den Daten $t_f = 4$ und $r = 0.2$ sowie der Steuerungsbeschränkung $-1 \le u(t) \le 1$ und der Zustandsbeschränkung $-0.4 \le x_2(t)$ für alle $t \in [0, t_f]$. Man beachte, hier werden in einem gewissen Zeitintervall sogar beide Ungleichungsbeschränkungen aktiv.

Numerische Resultate: Helmut Maurer, Tutorial on Control and State Constrained Optimal Control Problems. Part I: Examples, SADCO Summer School, Imperial College London, September 5, 2011.