Prof. Dr. H. J. Pesch
Lehrstuhl für Ingenieurmathematik
Universität Bayreuth

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen
Optimal Control of Partial Differential Equations
(Teil 1: WS 2011/12)

11. Übung

Vorbemerkung:

Ziel dieses Übungsblattes ist die Einübung der Herleitung von Optimalitätsbedingungen, jetzt auch mit der formalen Lagrange-Technik. Die ersten beiden Aufgaben sind hilfreich bei der Konstruktion von Testbeispielen mit analytischer Lösung für die Bewertung numerischer Approximationsverfahren. Die dritte Aufgabe behandelt ein sehr allgemeines elliptisches Optimalsteuerungsproblem auf zwei Wegen. Die vierte Aufgabe behandelt elliptische Optimalsteuerungsprobleme mit Dirichletschen Randsteuerungen, die — aus gutem Grund — nicht Gegenstand des der Vorlesung zugrundeliegenden Buches von F. Tröltzsch sind.

1) Ein modifiziertes Optimalsteuerungsproblem mit einer verteilten Steuerung und einer Dirichlet-Randbedingung

Gegeben sei ein beschränktes Lipschitzgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $y_\Omega \in L^2(\Omega)$, $e_\Omega \in L^2(\Omega)$ und $e_\Gamma \in L^2(\Gamma)$. Die Funktion e_Γ sei Randwert einer Funktion $y \in H^1(\Omega)$. Leiten Sie die notwendigen Optimalitätsbedingungen für die Aufgabe

$$\min J(y,u) := \int_\Omega (y - y_\Omega)^2 \, \mathrm{d}x$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta y &= u + e_\Omega\,, \\ y|_\Gamma &= e_\Gamma\,, \\ -1 \le u(x) &\le 1 \end{aligned}$$

her.

Hinweis: Man nehme der Einfachheit halber an, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ist und transformiere das elliptische Randwertproblem zunächst auf homogene Randbedingungen.

2) Ein modifiziertes Optimalsteuerungsproblem mit einer verteilten Steuerung und einer Neumann-Randbedingung

Gegeben sei ein beschränktes Lipschitzgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $y_\Omega \in L^2(\Omega)$, $e_\Omega \in L^2(\Omega)$ und $e_\Gamma \in L^2(\Gamma)$. Leiten Sie die notwendigen Optimalitätsbedingungen für die Aufgabe

$$\min J(y,u) := \frac{1}{2} \int\limits_\Omega (y - y_\Omega)^2 \, \mathrm{d}x + \int\limits_\Gamma e_\Gamma \, y \, \mathrm{d}s + \frac{1}{2} \int\limits_\Omega u^2 \mathrm{d}x$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta y + y &= u + e_\Omega \,, \\ \partial_\nu y &= e_\Gamma \,, \\ -1 \le u(x) &\le 1 \end{aligned}$$

her.

Hinweis: Man wende Übung 4, Aufgabe 4 und Übung 10, Aufgabe 2 an.

3) Herleitung notwendiger Optimalitätsbedingungen für ein Optimalsteuerungsproblem mit einem Differentialoperator in Divergenzform

Wir betrachten das Optimalsteuerungsproblem zu der bereits in Übung 5 behandelten allgemeineren partiellen Gleichung in Divergenzform mit dem dort eingeführten gleichmäßigen elliptischen Differentialoperator $\mathcal{A}$:

$$\min J(y,v,u) := \frac{\lambda_\Omega}{2} \|y - y_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda_\Gamma}{2} \|y - y_\Gamma\|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{\lambda_v}{2} \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda_u}{2} \|u\|^2_{L^2(\Gamma)}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\, y + c_0\, y &= d\, v && \text{in } \Omega \,, \\ \partial_{\nu,\mathcal{A}}\, y + \alpha\, y &= b\, u && \text{auf } \Gamma_1 \,, \\ y &= 0 && \text{auf } \Gamma_0 \end{aligned}$$

sowie den Box-Beschränkungen

$$\begin{aligned} v_a(x) \le v(x) \le v_b(x) \quad & \text{fast überall in } \Omega \,, \\ u_a(x) \le u(x) \le u_b(x) \quad & \text{fast überall auf } \Gamma_1 \,. \end{aligned}$$

a) *Herleitung der notwendigen Optimalitätsbedingungen mit der formalen Lagrange-Technik:*

Man leite die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung mit der formalen Lagrange-Technik her.

Hinweis: Man verwende als Zustandsraum

$$Y := \{y \in H^1(\Omega)\colon\, y|_{\Gamma_0} = 0\}$$

und setze als Lagrange-Funktion an

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y,u,v,p) = J(y,u,v) \;&- \int\limits_{\Omega} (\mathcal{A}\, y + c_0\, y - d\, v)\; p \,\mathrm{d}x \\ &- \int\limits_{\Gamma_1} (\partial_{\nu,\mathcal{A}}\, y + \alpha\, y - b\, u)\; p \,\mathrm{d}s\,.\end{aligned}$$

Nehmen Sie außerdem wie in Abschnitt 2.10 der Vorlesung an, dass der Multiplikator p im Randintegral gerade der Randwert des Multiplikators p im Gebietsintegral ist.

b) *Herleitung der notwendigen Optimalitätsbedingungen ohne die formale Lagrange-Technik:*

Beweisen Sie jetzt die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung zu obiger Aufgabe.

Hinweis: Man zeige: Das abstrakte quadratische Optimierungsproblem im zugrundeliegenden Hilbertraum $L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_1)$ lautet:

$$\begin{aligned}\min_{v\in V_{\mathrm{ad}},u\in U_{\mathrm{ad}}} f(v,u) := \frac{\lambda_\Omega}{2}\, &\|S_v\, v + S_u\, u - y_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &+\frac{\lambda_\Gamma}{2}\, \|E_\Gamma\; (S_v\, v + S_u\, u) - y_\Gamma\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \\ &+\frac{\lambda_v}{2}\, \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda_u}{2}\, \|u\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\end{aligned}$$

mit geeigneten linearen, stetigen Operatoren S_v, S_u und E_Γ.

Analog zu den Lemmata 2.16, 2.17 der Vorlesung lautet die notwendige und hinreichende Bedingung für ein Minimum $(\bar v, \bar u) \in V_{\mathrm{ad}} \times U_{\mathrm{ad}}$ von f

$$f'_v(\bar v,\bar u)\;(v - \bar v) + f'_u(\bar v,\bar u)\;(u - \bar u) \ge 0 \quad \forall\;(v,u) \in V_{\mathrm{ad}} \times U_{\mathrm{ad}}\,,$$

wobei $(f'_v, f'_u) = \operatorname{grad} f$ der Fréchet-Gradient von f ist.

Die in dieser Aufgabe benötigte Verallgemeinerung des Lemmas aus der Übung 10, Aufgabe 2 überträgt sich analog, insbesondere bleibt die Hauptaussage unverändert; nur die Randwertprobleme sind entsprechend gegen die allgemeineren Randwertprobleme auszutauschen (Beweis nicht erforderlich, da analog zu Übung 10, Aufgabe 2).

c) *Optimale stationäre Temperaturquelle mit vorgegebener Außentemperatur*

Man stelle vermöge der Teilaufgabe b) für das in 1.1.1 beschriebene Problem der optimalen stationären Temperaturquelle mit vorgegebener Außentemperatur y_a,

$$\min J(y,v) := \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} (y(x) - y_\Omega(x))^2 \, \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{2} \int\limits_{\Omega} (v(x))^2 \, \mathrm{d}x$$

unter

$$\begin{aligned} -\Delta y &= \beta\, v \quad \text{in } \Omega\,, \\ \partial_\nu y &= \alpha\, (y_a - y) \quad \text{on } \Gamma\,, \end{aligned}$$

die notwendigen Bedingungen auf.

4) Ein Optimalsteuerungsproblem mit einer Dirichletschen Randsteuerung

Gegeben sei ein beschränktes Lipschitzgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sowie $y_\Omega \in L^2(\Omega)$ und ein Parameter $\lambda > 0$. Leiten Sie mithilfe der formalen Lagrange-Technik die notwendigen Optimalitätsbedingungen für die Aufgabe

$$\min J(y,u) := \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} (y - y_\Omega)^2 \, \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{2} \int\limits_{\Gamma} u^2 \mathrm{d}s$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta y &= 20\,, \\ y &= u\,, \\ 0 \le u(x) &\le 10 \end{aligned}$$

her.

Hinweis: Setzen Sie die Lagrange-Funktion wie folgt an:

$$\mathcal{L}(\bar{y}, \bar{u}, p_1, p_2) = J(y,u) - \int\limits_{\Omega} (-\Delta y - 20)\; p_1 \, \mathrm{d}x + \int\limits_{\Gamma} (y - u)\; p_2 \, \mathrm{d}s$$

und integrieren Sie *zweimal* partiell.

Bei diesem Typ von Aufgaben, darf man *nicht* voraussetzen, dass $p_1|_\Gamma = p_2$ ist. Der tiefere Grund liegt darin, dass man als Steuerung eine Funktion $u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ vorgeben muss, um den Zustand $y \in H^1(\Omega)$ zu garantieren; siehe Bemerkung 3 zu Aufgabe 1 der 4. Übung. Dies ändert die Analysis Dirichletscher Randsteuerungsaufgaben deutlich gegenüber den bisher untersuchten Modellproblemen.