Prof. Dr. H. J. Pesch
Lehrstuhl für Ingenieurmathematik
Universität Bayreuth

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen
Optimal Control of Partial Differential Equations
(Teil 1: WS 2011/12)

10. Übung

Vorbemerkung:

Ziel dieses Übungsblattes ist die Erweiterung der Optimalitätsbedingungen auf allgemeinere Problemstellungen. Insbesondere sollen Probleme mit einer verteilten Steuerung (stationäre Temperaturquelle) und einer Randsteuerung (in einer Randbedingung der dritten Art) untersucht werden.

Schließlich sollen noch die Optimalitätsbedingungen für eine lineare Optimalsteuerungsaufgabe hergeleitet werden.

1) Eine quadratische Optimierungsaufgabe in $\mathbb{R}$

Lösen Sie die quadratische Optimierungsaufgabe in $\mathbb{R}$,

$$\min_{v\in[u_a,u_b]} \{\beta\, p\, v + \frac{\lambda}{2}\, v^2\}$$

bei gegebenen reellen Zahlen u_a, u_b, β, p und $\lambda > 0$. Leiten Sie eine Formel des Projektionstyps her; siehe 2.8.45 der Vorlesung.

Bemerkung: Die Lösung dieser quadratischen Optimierungsaufgabe wird beim Beweis des Minimumprinzips verwendet; siehe Theorem 2.23 der Vorlesung.

2) Verallgemeinerung des Lemmas 2.19 der Vorlesung

Es seien Funktionen

$$a_\Omega \in L^2(\Omega),\; v \in L^2(\Omega),$$

$$a_\Gamma \in L^2(\Gamma),\; u \in L^2(\Gamma),$$

$$c_0 \in L^\infty(\Omega),\; b_\Omega \in L^\infty(\Omega),$$

$$\alpha \in L^\infty(\Gamma),\; b_\Gamma \in L^\infty(\Gamma),$$

$$\alpha \geq 0,\; c_0 \geq 0$$

gegeben.

Mit y und p seien die schwachen Lösungen der elliptischen Randwertprobleme

$$\begin{aligned} -\Delta y + c_0\, y &= b_\Omega\, v\,, & \qquad -\Delta p + c_0\, p &= a_\Omega\,, \\ \partial_\nu y + \alpha\, y &= b_\Gamma\, u\,, & \qquad \partial_\nu p + \alpha\, p &= a_\Gamma \end{aligned}$$

bezeichnet.

Dann gilt

$$\int_\Omega a_\Omega\, y\, \mathrm{d}x + \int_\Gamma a_\Gamma\, y\, \mathrm{d}s = \int_\Omega b_\Omega\, p\, v\, \mathrm{d}x + \int_\Gamma b_\Gamma\, p\, u\, \mathrm{d}s\,.$$

Hinweis: Man schreibe die Variationsformulierungen für die beiden elliptischen Randwertprobleme auf und verwende als Testfunktionen y und p in $H^1(\Omega)$ kreuzweise.

3) Notwendige Optimalitätsbedingungen für eine optimale stationäre Temperaturquelle und für eine optimale stationäre Randtemperatur

a) *Notwendige Optimalitätsbedingungen für eine verteilte Steuerung und Randbedingungen dritter Art:*

Man bestimme die notwendigen Optimalitätsbedingungen zur Aufgabe

$$\min\; J(y,u) := \frac{\lambda_\Omega}{2}\, \|y - y_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda_\Gamma}{2}\, \|y - y_\Gamma\|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{\lambda}{2}\, \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

unter den Nebenbedingungen

$$-\Delta y = \beta\, u \quad \text{in } \Omega\,,$$

$$\partial_\nu y + \alpha\, y = 0 \quad \text{auf } \Gamma\,,$$

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \quad \text{fast überall in } \Omega\,.$$

Dabei setzen wir $\lambda_\Omega > 0$, $\lambda_\Gamma > 0$, $\lambda > 0$, $0 \le \alpha \in L^\infty(\Gamma)$, $\|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma)} \ne 0$, $y_\Omega \in L^2(\Omega)$ und $y_\Gamma \in L^2(\Gamma)$ voraus.

Man zeige also: Ist $\bar u$ optimale Steuerung des vorstehenden Optimalsteuerungsproblems und $\bar y$ der zugehörige Zustand, dann existiert genau eine Lösung p der zugehörigen adjungierten Gleichung, so dass die folgende Variationsungleichung erfüllt ist:

$$\int\limits_\Omega (\beta(x)\, p(x) + \lambda\, \bar u(x))\ (u(x) - \bar u(x))\ \mathrm{d}x \ge 0 \quad \forall u \in U_{\mathrm{ad}}\,.$$

Man gebe die adjungierte Gleichung an.

Wie lautet der Gradient der Zielfunktion $f'(u)$ mit $f(u) := J(Su, u)$, wobei $S\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, $y = Su$, den Lösungsoperator der Zustandsgleichung bezeichnet.

Hinweis: Man schreibe die Aufgabe zunächst vermöge des Lösungsoperators S als quadratische Optimierungsaufgabe im Hilbertraum $L^2(\Omega)$, berechne dann mithilfe der Kettenregel den Gradienten der Zielfunktion $f'(u)$ dieser Aufgabe unter Vermeidung des agjungierten Lösungsoperators S^* (vgl. Kapitel 2.8) und schreibe die notwendige Bedingung 2.8.55 (Variationsungleichung) dann vermöge der Behauptung von Aufgabe 2 um, indem man in dieser statt y und u die Größen $y - \bar y$ und $u - \bar u$ einsetzt und damit in der Variationsungleichung y durch p eliminiert. Man überlege sich bei diesem Schritt, wie man a_Ω, a_Γ, c_0, b_Ω und b_Γ zu wählen hat. Damit liegt dann auch das adjungierte System fest.

b) *Notwendige Optimalitätsbedingungen für eine Randsteuerung in einer Randbedingung dritter Art:*

Man bestimme die notwendigen Optimalitätsbedingungen zur Aufgabe

$$\min\ J(y, u) := \frac{1}{2}\, \|y - y_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\, \|u\|^2_{L^2(\Gamma)}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta y &= 0 \quad \text{in } \Omega\,,\\ \partial_\nu y + \alpha\, y &= \alpha\, u \quad \text{auf } \Gamma\,,\\ u_a(x) \le u(x) &\le u_b(x) \quad \text{fast überall auf } \Gamma\,. \end{aligned}$$

Dabei setzen wir $\lambda > 0$, $0 \le \alpha \in L^\infty(\Gamma)$, $\|\alpha\|_{L^\infty} \ne 0$ und $y_\Omega \in L^2(\Omega)$ voraus.

Man zeige also: Ist $\bar{u}$ optimale Steuerung des vorstehenden Optimalsteuerungsproblems und $\bar{y}$ der zugehörige Zustand, dann existiert genau eine Lösung p der zugehörigen adjungierten Gleichung, so dass die folgende Variationsungleichung erfüllt ist:

$$\int_\Gamma (\alpha(x)\, p(x) + \lambda\, \bar{u}(x))\ (u(x) - \bar{u}(x))\ \mathrm{d}s(x) \geq 0 \quad \forall u \in U_{\mathrm{ad}}\,.$$

Man gebe die adjungierte Gleichung an.

Wie lautet der Gradient der Zielfunktion $f'(u)$ mit $f(u) := J(Su, u)$, wobei $S\colon L^2(\Gamma) \to L^2(\Omega)$, $y = Su$, den Lösungsoperator der Zustandsgleichung bezeichnet.

Hinweis: Siehe Teilaufgabe a).

Bemerkung: Umgekehrt ist in beiden Fällen auch jedes $\bar{u} \in U_{\mathrm{ad}}$ optimal, das mit $\bar{y} := y(\bar{u})$ und der Lösung p der adjungierten Gleichung den obigen Variationsungleichungen genügt.

4) Notwendige Optimalitätsbedingungen für ein lineares Optimalsteuerungsproblem

Man bestimme die notwendigen Optimalitätsbedingungen zur folgenden linearen Aufgabe

$$\min\ J(y, v, u) := \int_\Omega (a_\Omega\, y + \lambda_\Omega\, v)\ \mathrm{d}x + \int_\Gamma (a_\Gamma\, y + \lambda_\Gamma\, u)\ \mathrm{d}s$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
-\Delta y &= b_\Omega\, v \quad \text{in } \Omega\,, \\
\partial_\nu y + \alpha\, y &= b_\Gamma\, u \quad \text{auf } \Gamma\,. \\
v_a(x) \leq v(x) &\leq v_b(x) \quad \text{fast überall in } \Omega\,. \\
u_a(x) \leq u(x) &\leq u_b(x) \quad \text{fast überall in } \Gamma\,.
\end{aligned}$$

Dabei setzen wir $a_\Omega \in L^2(\Omega)$, $\lambda_\Omega \in L^2(\Omega)$, $a_\Gamma \in L^2(\Gamma)$, $\lambda_\Gamma \in L^2(\Gamma)$, $b_\Omega \in L^\infty(\Omega)$ und $b_\Gamma \in L^\infty(\Gamma)$ voraus. Ebenfalls seinen $v_a \in L^2(\Omega)$, $v_b \in L^2(\Omega)$, $u_a \in L^2(\Gamma)$ und $u_b \in L^2(\Gamma)$ und $\alpha \geq 0$ fast überall und $\alpha \not\equiv 0$.

Hinweis: Nutzen Sie die Nichtnegativität der Differenz der Zielfunktionswerte einer beliebigen und der optimalen Lösung, und schreiben Sie die Differentialgleichung für die Differenz der beiden Lösungen auf.