Prof. Dr. H. J. Pesch
Lehrstuhl für Ingenieurmathematik
Universität Bayreuth

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen
Optimal Control of Partial Differential Equations
(Teil 1: WS 2011/12)

9. Übung (Zusatzübung „Variationsrechnung“)

Vorbemerkung:

Gâteaux-Variationen spielen u. a. auch in der Variationsrechnung eine Rolle. Variationsprobleme sind Minimierungsprobleme für Funktionale über Funktionenräumen. Insbesondere sind in diesem Zusammenhang solche Aufgaben interessant, bei denen Nebenbedingungen in Form von Funktionalgleichungen (sogenannte isoperimetrische Probleme) gegeben sind. Treten dagegen algebraische Gleichungen oder gar gewöhnliche Differentialgleichungen (sogenannte Larangesche Probleme) auf, handelt es sich um Minimierungsprobleme in Banachräumen, wie sie auch bei Optimalsteuerungsproblemen vorliegen. Optimalsteuerungsprobleme für gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen sind in diesem Sinne verallgemeinerte Variationsprobleme, insbesondere weil bei der Minimierung im Gegensatz zur klassischen Variationsrechung allgemeinere Funktionenräume zugelassen sind.

Um einige Anwendungen für Gâteaux-Variationen aufzuzeigen, sollen daher auf diesem Zusatzblatt auch einige Variationsprobleme untersucht werden. Die notwendigen Bedingungen für Minima von einfachen Variationsproblemen sind in den Hinweisen angegeben.

Fundamental für Variationsprobleme ist das sogenannte

Fundamentallemma der Variationsrechnung

Vor.: *Sei* $g \in C^0[a,b]$ *und sei*

$$V_0^r := \{h \in C^r[a,b] \colon h(a) = h(b) = 0\}\,, \quad r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\,.$$

Beh.:

$$\forall h \in V_0^r \int\limits_a^b g(x)\,h(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow g \equiv 0\,.$$

Der Beweis ist relativ elementar und findet sich in jedem Buch über Variationsrechnung.

Das Fundamentallemma kommt in den Aufgaben 2 und 3 zum Einsatz.

Für den expliziten Nachweis, dass die den notwendigen Bedingungen — siehe Hinweise zu den Aufgaben 1 und 2 — genügenden Lösungskandidaten u^* auch wirklich minimierende bzw. maximierende Funktionen sind, beweise man, dass $F(u^*) \leq F(u + \Delta u)$ bzw. $F(u^*) \geq F(u + \Delta u)$ für alle zulässigen Funktion Δu ist.

Obwohl dieses Übungsblatt in erster Linie für jene gedacht ist, die Kenntnisse über Variationsrechnung haben, sollten die Aufgaben aber davon unabhängig lösbar sein.

Literatur:

Ioffe, A. D., Tihomirov, V. M.: *Theory of Extremal Problems* (*Theorie der Extremalaufgaben*), Amsterdam: North Holland (Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften), 1979.

Pars, L. A.: *An Introduction to the Calculus of Variations*, London: Heinemann, 1962.

Sagan, H.: *Introduction to the Calculus of Variations*, New York: McGraw-Hill Book Company, 1969.

Smith, D. R.: *Variational Methods in Optimization*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1974.

1) Gâteaux-Variation bei Variationsfunktionalen

Man betrachte das Funktional

$$F(u) = \int\limits_0^1 \left[u(x)^2 + 2\,(x-1)\,u(x) - 2\,e^x\,u(x)\right]\,\mathrm{d}x$$

über dem Vektorraum $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

a) Man berechne die Gâteaux-Variation $\delta F(u,h)$ in u in Richtung von h mit Hilfe der Definition der Vorlesung.

b) Man berechne diese Variation noch einmal, jetzt mit Hilfe der Formel

$$\delta F(u,h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(u + t\,h)|_{t=0}\,.$$

c) Man berechne $\delta F(0,1)$.

d) Welcher Bedingung muss $u = u(x)$ genügen, damit die Gâteaux-Variation in Richtung $h(x) \equiv b$ mit $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ für alle b verschwindet?

e) Welchen Bedingungen muss $u = u(x)$ genügen, damit die Gâteaux-Variation in Richtung aller linearen Funktionen $h(x) = a\,x + b$ verschwindet?

f) Für die Teilaufgaben f) und g) betrachte man das gegebene Funktional eingeschränkt auf den Vektorraum $\Pi_1[0,1]$ aller Polynome vom Grad ≤ 1: Welche Funktion $u^* = u^*(x)$ ist Kandidat für ein Minimum des Funktionals?

Hinweis: Aus der Variationsrechung kennt man das Theorem (notwendige Bedingung): *F besitze eine Gâteaux-Variation in $u_0 \in D \subset U$, U normierter Raum, D offen. F habe ein lokales Extremum in u_0. Dann muss $\delta F(u_0,h) = 0$ für alle $h \in U$ mit $u_0 + h \in D$ gelten.*
Siehe: Smith, D. R.: *Variational Methods in Optimization*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1974.

g) Man bestätige das Ergebnis aus f) durch direkte Minimierung

$$\min_{\alpha,\beta\,\in\,\mathbb{R}} \; F(\alpha\,x + \beta)\,.$$

h) Welche Funktion u^* verleiht dem Funktional auf $C^0([0,1],\mathbb{R})$ ein Minimum?

2) Variationsproblem mit einer sogenannten isoperimetrischen Gleichungsnebenbedingung

Man bestimme das Maximum des Funktionals

$$F(u) := \int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x$$

über dem Vektorraum $C^0([0,1],\mathbb{R})$ unter der Gleichungsnebenbedingung

$$G(u) := \int_0^1 [u(x)^2 + x\,u(x)]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}.$$

Man zeige direkt, dass es sich um ein Maximum handelt.

Hinweis: Es gilt die Lagrangesche Multiplikatorenregel der Variationsrechnung:

Voraussetzungen:

- *F und G seien Funktionale auf $D \subset U$, U normierter Raum, D offen.*
- *F und G haben Gâteaux-Variationen auf D.*
- *u_0 sei lokales Extremum von F in der Menge*

$$D[G=\gamma] := \{u \in D \colon G(u) = \gamma\}\,, \quad \gamma \in \mathbb{R} \text{ beliebig, aber fest}\,.$$

- *Es gelte: $D[G=\gamma] \neq \emptyset$.*
- *$F(u_0,h)$ sei schwach stetig in u_0, d. h. $\lim_{u\to u_0} F(u,h) = F(u_0,h)$ für alle $h \in U$ mit $u_0 + h \in D$.*
- *$G(u_0,h)$ sei ebenfalls schwach stetig in u_0.*

Behauptung: Dann gilt mindestens eine der der beiden folgenden Bedingungen:

$$\delta G(u_0,h) = 0 \quad \text{für alle } h \in U \text{ mit } u_0 + h \in D\,,$$

oder es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass

$$\delta F(u_0,h) = \lambda\,\delta G(u_0,h) \quad \text{für alle } h \in U \text{ mit } u_0 + h \in D\,.$$

Beweis: Smith, D. R.: Variational Methods in Optimization, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1974.

3) Variationsproblem mit einer isoperimetrischen Ungleichungsnebenbedingung

Man bestimme das Minimum des Funktionals

$$F(u) := \int_0^1 x\, u(x)\, \mathrm{d}x$$

über dem Vektorraum $C^0([0,1],\mathbb{R})$ unter der Ungleichungsnebenbedingung

$$G(u) := \int_0^1 u(x)^2\, \mathrm{d}x \le \frac{1}{12}.$$

Man zeige direkt, dass es sich um ein Minimum handelt.

Hinweis: Man mache eine Fallunterscheidung:

1. Fall: $G(u) < 1/12$. Man verwende den Hinweis zu Aufgabe 1f.

2: Fall: $G(u) = 1/12$. Man verwende den Hinweis zu Aufgabe 2.

4) Ein Beispiel von Weierstraß und das Dirichlet-Prinzip

Man betrachte das Variationsproblem

$$F(u) = \int_{-1}^1 x^2\, u'(x)^2\, \mathrm{d}x \stackrel{!}{=} \min_{u \in K}$$

über dem Funktionenraum

$$K := \{u \in C^1[-1,1] \colon u(-1) = -1\,,\ u(1) = 1\}\,.$$

Man zeige, dass das Minimum für kein $u \in K$ angenommen wird, ja dass das Variationsproblem sogar noch nicht einmal eine stetige Lösung besitzt.

Hinweis: Man untersuche für $\varepsilon \to 0^+$ die Funktionenfolge

$$u_\varepsilon(x) := \frac{\arctan \frac{x}{\varepsilon}}{\arctan \frac{1}{\varepsilon}}\,, \quad -1 \le x \le 1\,.$$

Bemerkung: Mit diesem Beispiel widerlegte Weierstraß das Dirichlet-Prinzip.