Prof. Dr. H. J. Pesch
Lehrstuhl für Ingenieurmathematik
Universität Bayreuth

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen
Optimal Control of Partial Differential Equations
(Teil 1: WS 2011/12)

8. Übung

Vorbemerkung:

Zur Bestimmung von Optimalitätsbedingungen für Optimierungsprobleme über Funktionenräume, wie z. B. für Optimalsteuerungsprobleme mit partiellen Differentialgleichungen, benötigen wir eine Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffs der Analysis. Als Verallgemeinerung der Richtungsableitung führen wir die Gâteaux-Variation und die Gâteaux-Ableitung sowie als Verallgemeinerung der Differenzierbarkeit und der gewöhnlichen Ableitung die Fréchet-Differenzierbarkeit und die Fréchet-Ableitung ein. Mit diesem Übungsblatt soll der Umgang mit den neuen Ableitungsbegriffen eingeübt werden.

Ein wichtiges Anwendungsgebiet für Gâteaux-Variationen sind Aufgaben der klassischen Variationsrechnung, insbesondere jene, bei denen Funktionale über Funktionenräumen minimiert werden und auch die Nebenbedingungen durch Funktional(un)gleichungen gegeben sind. Dazu wird ein Zusatzblatt (Übung 9) für jene herausgegeben, die bereits Kenntnisse in Variationsrechnung haben.

Literatur:

Ioffe, A. D., Tihomirov, V. M.: *Theory of Extremal Problems* (*Theorie der Extremalaufgaben*), Amsterdam: North Holland (Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften), 1979, Kapitel 0.2.

Jahn, J.: *Introduction to the Theory of Nonlinear Optimization*, Berlin: Springer, 1994.

1) Gâteaux-Variation bei skalaren Funktionen mehrerer Veränderlicher

Die Funktion $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei wie folgt definiert:

$$F(u_1, u_2) = \begin{cases} \dfrac{u_1\, u_2^2}{u_1^2 + u_2^4}\,, & \text{wenn} \quad u_1 \neq 0\,, \\ 0\,, & \text{wenn} \quad u_1 = 0\,. \end{cases}$$

a) Man zeige, dass für die Gâteaux-Variation im Punkt $u = (u_1, u_2) \neq (0, 0)$ in Richtung $h = (h_1, h_2)$ gilt:

$$\delta F(u, h) = F_{u_1}\, h_1 + F_{u_2}\, h_2 = \operatorname{grad} F \cdot h\,.$$

b) Man zeige, dass im Ursprung $u = (0, 0)$ gilt:

$$\delta F(0, h) = \begin{cases} \dfrac{h_2^2}{h_1}\,, & \text{wenn} \quad h_1 \neq 0\,, \\ 0\,, & \text{wenn} \quad h_1 = 0\,. \end{cases}$$

Wo existieren die Gâteaux-Variationen? Wo ist F Gâteaux-differenzierbar, wo nicht? Wie lautet gegebenenfalls die Gâteaux-Ableitung?

Bemerkung: Für Funktionen $F\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ stimmt die Gâteaux-Variation mit der Richtungsableitung überein.

2) Gâteaux-Variation bei Funktionalen

Berechnen Sie die Gâteaux-Variationen über dem Raum $C^0[1,2]$ für

a)

$$F(u) := \int_1^2 x\, u(x)^2 \, \mathrm{d}x \,,$$

b)

$$G(u) := \int_1^2 u(x) \, \mathrm{d}x \,.$$

Sind die Funktionale Gâteaux-differenzierbar?

Bemerkung: Analog zu Aufgabe 1 der 9. Übung kann man zeigen, dass das Variationsproblem über dem normierten Raum $C^0[1,2]$

$$F(u) = \int_1^2 x\, u(x)^2 \, \mathrm{d}x \overset{!}{=} \min_{u \in C^0[1,2]} \quad \text{unter} \quad G(u) = \int_1^2 u(x) \, \mathrm{d}x = \ln 2$$

die eindeutige Lösung $u_0(x) = \frac{1}{x}$ besitzt.

3) Fréchet-Differenzierbarkeit der Norm zum Quadrat

Weisen Sie nach, dass im Hilbertraum H das Funktional $F(u) := \|u\|_H^2$ stetig Fréchet-differenzierbar ist.

Bemerkungen: In $H = \mathbb{R}^N$ sind Fréchet-Differenzierbarkeit und totale Differenzierbarkeit identisch. Ferner gilt: Existiert die Fréchet-Ableitung, so auch die Gâteaux-Ableitung, und beide Ableitungen sind dann gleich (Theorem 2.15 der Vorlesung), d. h. man kann die konkrete Form einer Fréchet-Ableitung als Gâteaux-Ableitung berechnen.

4) Berechnung von Fréchet-Ableitungen als Gâteaux-Ableitung

Wir betrachten den Integraloperator $F\colon C^0[a,b] \to C^0[a,b]$ mit

$$F(u)(x) := \int\limits_a^b G(x,y)\, f(u(y))\, \mathrm{d}y\,, \quad -\infty < a \le x \le b < \infty\,.$$

Dabei seien die Funktion $G\colon [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

Man zeige, der Integraloperator ist in jedem Punkt $u \in C^0[a,b]$ Fréchet-differenzierbar und besitzt die Fréchet-Ableitung

$$(F'(u)\,h)\,(x) = \int\limits_a^b G(x,y)\, f'(u(y))h(y)\,\mathrm{d}y \quad \text{auf} \quad [a,b]$$

für alle $h \in C^0[a,b]$.

Hinweise: Man benutze die Bemerkung zu Aufgabe 3 und berechne zunächst die Gâteaux-Variation

$$\delta F(u,h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(u + t\,h)|_{t=0}\,.$$

Als erstes zeige man, dass die Gâteaux-Variation $\delta F(u,h)$ homogen in h ist, d. h. $\delta F(u,\lambda\,h) = \lambda\,\delta F(u,h)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann zeige man ihre Additivität bzgl. h, d. h. $\delta F(u,h_1+h_2) = \delta F(u,h_1)+\delta F(u,h_2)$ und schließlich ihre Stetigkeit, d. h. $\|\delta F(u,h)(\cdot)\|_{C^0[a,b]} \le c\,\|h(\cdot)\|_{C^0[a,b]}$. Damit ist die Gâteaux-Variation $\delta F(u,h)$ eine Gâteaux-Ableitung, und wir können schreiben: $F'_G(u) := \delta F(u,\cdot)$.

Zum Nachweis der Existenz der Fréchet-Ableitung verwende man den Satz: *Existiert in einer Umgebung um u die Gâteaux-Variation $\delta F(u,h)$ und ist diese dort gleichmäßig stetig in u und stetig in h, so existiert in dieser Umgebung die Fréchet-Ableitung $F'(u)$, und es gilt $F'(u) = F'_G(u)$.*

Siehe Ljusternik, L. A., Sobolew, W. I.: *Elemente der Funktionalanalysis*, Zürich: Verlag Harry Deutsch, 1999, Satz 2, Seite 310.

Es bleibt dann als letztes die gleichmäßige Stetigkeit der Gâteaux-Ableitung $F'_G(u)$ bzgl. u nachzuweisen.

(1) Dazu zeige man zuerst

$$\|F'_G(v)(\cdot) - F'_G(w)(\cdot)\|_{C^0[a,b]} \le C\ \big\|f'\big(v(\cdot)\big) - f'\big(w(\cdot)\big)\big\|_{C^0[a,b]}$$

mit einer von v und w unabhängigen Konstanten C.

(2) Dann definiere man eine Umgebung

$$\mathcal{B}_\rho(u) := \{v \in C^0[a,b] : \ \|v(\cdot) - u(\cdot)\|_{C^0[a,b]} \leq \rho\}$$

und zeige

$$\forall\, \tilde{\delta} > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 \ \ \forall\, v(x), w(x) \in I \ \ \text{mit} \ \ |v(x) - w(x)| \leq \delta$$
$$\Longrightarrow \quad |f'(v(x)) - f'(w(x))| \leq \tilde{\delta}$$

mit einem geeignet gewählten Intervall I.

(3) Schließich zeige man

$$\forall\, \epsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 \ \ \forall\, v, w \in \mathcal{B}_\rho(u) \ \ \text{mit} \ \ \|v(\cdot) - w(\cdot)\|_{C^0[a,b]} \leq \delta$$
$$\Longrightarrow \quad \|F'_G(v)(h(\cdot)) - F'_G(w)(h(\cdot))\|_{C^0[a,b]} \leq \epsilon\,.$$