Prof. Dr. H. J. Pesch
Lehrstuhl für Ingenieurmathematik
Universität Bayreuth

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

Optimal Control of Partial Differential Equations

(Teil 1: WS 2011/12)

7. Übung

Vorbemerkung:

In diesem Übungsblatt soll der Umgang mit weiteren funktionalanalytischen Hilfsmitteln aus der sogenannten schwachen Topologie wie schwache Konvergenz, schwache Folgenstetigkeit, schwache Folgenabgeschlossenheit und schwache Folgenkompaktheit eingeübt werden. Mit Hilfe dieses abgeschwächten Konvergenzbegriffs — gegenüber der starken Konvergenz der Norm nach — lassen sich Minimierungsprobleme unter weitaus schwächeren Voraussetzungen lösen. In unendlichdimensionalen Räumen werden die Schwierigkeiten dadurch induziert, dass Kugeln nur präkompakt sind, d. h. dass man aus einer Folge von Elementen auf einer Kugel zwar eine konvergente Teilfolge auswählen kann, dass aber deren Grenzwert nicht auf der Kugel liegen muss; siehe das Beispiel aus der Vorlesung: Die Folge $u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n\,x)$ ist im Hilbertraum $L^2(-\pi,\pi)$ mit dem Skalarprodukt $(u,v) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$ eine schwach konvergente Nullfolge, deren Folgenglieder jedoch alle auf der Einheitskugel des $L^2(-\pi,\pi)$ liegen. (Anschaulich reflektiert sich dies wieder in der Tatsache, dass Volumen und Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbf{R}^n$ mit $n \to \infty$ gegen Null gehen.)

Allerdings ist die Folgenkompaktheit bzgl. der schwachen Konvergenz gesichert, jedenfalls für die Klasse der reflexiven Räume ($U^{**} = U$). Die Stetigkeit der Norm geht bzgl. der schwachen Konvergenz allerdings verloren, sie bleibt aber immerhin noch schwach unterhalbstetig; siehe Aufgabe 1c. Die Klasse der reflexiven Räume spielt daher zwischen der Klasse der Hilberträume — sie sind immer reflexiv — und der Klasse der allgemeinen Banachräume eine herausragende Rolle in der Optimierung auf unendlichdimensionalen Räumen.

Man beachte darüber hinaus, dass in der schwachen Topologie „überdeckungskompakt“ (jede offene Überdeckung einer Teilmenge Ω eines normierten Raumes U besitzt eine endliche Teilüberdeckung) und „folgenkompakt“ (jede Folge in Ω besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in Ω) in allgemeinen unendlichdimensionalen Räumen nicht äquivalent sind.

Bzgl. der starken Topologie gilt eine analoge Aussage bereits in metrischen Räumen.

Insbesondere zeigen wir, dass schwach konvergente Folgen einen eindeutigen (schwachen) Grenzwert besitzen (Aufgabe 1a), beschränkt sind (Aufgabe 1d) und dass starke Konvergenz schwache Konvergenz nach sich zieht, aber im Allgemeinen nicht umgekehrt (Aufgabe 1b). Ferner zeigen wir, dass Normen in jedem normierten Raum zwar stetig (stark folgenstetig), aber im Allgemeinen nicht schwach folgenstetig sind (Aufgabe 2). Sie sind aber zumindest schwach nach unter halbstetig (Aufgabe 1c).

Mit den letzten beiden Aufgaben werden dann erstmalig Probleme behandelt, die unmittelbar mit der Optimalen Steuerung in Funktionenräumen zusammenhängen. Die üblich gewählte Menge der zulässigen Steuerungen ist abgeschlossen und konvex (Aufgabe 3) und das weit verbreitete, regularisierte Tracking-Funktional ist streng konvex (Aufgabe 4).

Diese Eigenschaften müssen grundsätzlich erfüllt sein, um später die Existenz optimaler Lsüngen von Optimalsteuerungsproblemen mit partiellen Differentialgleichungen beweisen zu können.

Literatur:

Alt, H. W.: Lineare Funktionalanalysis, 4. Auflage, Berlin, Springer, 2002, Seiten 211 ff.

Heuser, H.: *Funktionalanalysis*, 3. Auflage, Stuttgart: Teubner, 1992, Kapitel X, S. 341ff.

Yosida, K.: *Functional Analysis*, 6. Auflage, Berlin: Springer, 1980, Kapitel V, S. 119ff.

1) Zur schwachen Konvergenz

Es sei $\{U, \|\cdot\|_U\}$ ein reeller Banachraum und $\{H, (\cdot,\cdot)\}$ ein Hilbertraum.

Im Folgenden schreiben wir für die Werte $f(u)$ linearer Funktionale (f, u), auch wenn U *kein* Hilbertraum ist. Mit diesem *duality pairing* lassen sich Rechenumformungen mit linearen Funktionen bequem wie mit den Rechenregeln für Skalarprodukte hinschreiben. Die Abschätzung $|(f,u)| = |f(u)| \leq \|f\|_{U^*}\,\|u\|_U$ für lineare Funktionale f ist in dieser Schreibweise äquivalent zur Stetigkeitsbedingung. In einem Hilbertraum wäre sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung. Häufig wird auch das Symbol $\langle f, u\rangle$ für $f(u)$ verwendet, um den Unterschied zum Skalarprodukt (f, u) im Hilbertraum zu kennzeichnen.

a) Man zeige: Der schwache Limes einer Folge $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $u_n \in U$, $n \in \mathbb{N}$, ist eindeutig bestimmt.

b) Man zeige: Jede (stark, d. h. der Norm nach) gegen $u \in U$ konvergente Folge $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $u_n \in U$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert auch schwach gegen u, d. h.

$$u_n \to u \Longrightarrow u \rightharpoonup u \quad \text{für} \quad n \to \infty\,.$$

Die Umkehrung gilt nicht! Warum?

c) Man zeige: Die Norm ist schwach nach unten halbstetig, das heißt, dass

$$u_n \rightharpoonup u \Longrightarrow \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_U \geq \|u\|_U\,.$$

Hinweis zu c): Man verwende eine Folgerung des Satzes von Hahn-Banach: Ist $u_0 \neq 0$ für ein $u_0 \in U$, so gibt es stets ein $f_0 \in U^*$ mit

$$\|f_0\|_{U^*} = 1 \wedge f_0(u_0) = \|u_0\|_U\,;$$

siehe Alt, Folgerung 4.17 von Satz 4.16, Seiten 167f.

Der Satz von Hahn-Banach — siehe z. B. Alt, Satz 4.14, Seite 163 — ist ein sehr wichtiger Satz der Funktionalanalysis und soll hier in der Version für lineare Funktionale zitiert werden (Alt, Satz 4.15, Seite 166):

Sei $\{U, \|\cdot\|_U\}$ ein normierter Vektorraum und $V \subset U$ ein Unterraum mit der gleichen Norm. Dann gibt es zu $g \in V^*$ ein $f \in U^*$ mit

$$f = g \quad \textit{auf} \quad V \quad \textit{und} \quad \|f\|_{U^*} = \|g\|_{V^*}\,.$$

Eine wichtige Folgerung dieses Satzes ist, dass sich Punkte eines normierten Raumes von Unterräumen durch lineare Funktionale trennen lassen. Diese Trennungseigenschaft wird oft zum Nachweis benutzt, dass ein gegebener Unterraum dicht im Raum U liegt; siehe Alt, Seite 167 und 223.

d) Man zeige: Schwach konvergente Folgen sind beschränkt.

Hinweise zu d): Zum Beweis dieser Aussage wird der Begriff der schwach$*$ Konvergenz, der Satz von Banach-Steinhaus aus der Funktionalanalysis — siehe z. B. Alt, S. 211, oder Heuser, S. 248 — sowie die kanonische Einbettung des Banachraumes U in seinen bidualen Raum U^{**} benötigt.

(1) <u>Definition:</u> Eine Folge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ in U^* *konvergiert schwach$*$ gegen* $f \in U^*$, im Zeichen $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, falls

$$(f_n, u) \to (f, u) \quad \text{für alle } u \in U\,,$$

d. i. nichts anderes als punktweise Konvergenz. Auch für schwach* konvergente Folgen ist der schwach* Limes eindeutig. Ebenso impliziert starke Konvergenz auch schwach* Konvergenz; dies folgt trivialerweise aus der Definition.

(2) <u>Der Satz von Banach-Steinhaus</u> besagt: *Seien U ein Banachraum und V ein normierter Raum sowie $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(U, V)$ eine Teilmenge der linearen und stetigen Abbildungen von U nach V mit*

$$\sup_{T\in\mathcal{T}} \|T\,u\|_V < \infty \quad \textit{für alle } u \in U\,,$$

dann folgt

$$\sup_{T\in\mathcal{T}} \|T\| < \infty\,,\ \textit{d. h. } \mathcal{T} \textit{ ist in } \mathcal{L}(U,V) \textit{ beschränkt}.$$

(3) Vorgehensweise: 1. Schritt: Man zeige zuerst, dass

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \Longrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{U^*} < \infty\,.$$

Dazu verwende man den Satz von Banach-Steinhaus.

(4) Definition: Auf U definiert man die *kanonische Einbettung* von U auf den bidualen Raum U^{**} wie folgt:

$$J\colon U \longrightarrow U^{**}\,,\quad u \mapsto J_u \text{ vermöge } J_u(f) := f(u) =: (f,u)\ \forall f \in U^*\,.$$

Diese Abbildung ist injektiv, denn $J(u_1) = J(u_2) \Rightarrow J_{u_1}(f) = J_{u_2}(f) \Rightarrow (f,u_1) = (f,u_2) \Rightarrow (f, u_1 - u_2) = 0\ \forall f \in U^*$, woraus $u_1 - u_2 = 0$ folgt.

Daher kann man im Sinne dieser Konstruktion jedes Element $u \in U$ als Funktional aus U^{**} auffassen, indem man es mit J_u identifiziert: Im Zeichen $U \subset U^{**}$. Ist diese Abbildung surjektiv, gilt also $U = U^{**}$, dann heißt U reflexiv. Wegen des Rieszschen Darstellungssatzes sind alle Hilberträume reflexiv.

(5) Vorgehensweise: 2. Schritt: Man zeige, dass $J_u \in \mathcal{L}(U,U^{**})$, also linear und stetig ist. Ferner zeige man, dass J auch isometrisch ist, d. h. $\|J_u\|_{U^{**}} = \|u\|_U$. Schließlich zeige man, dass $J\,u_n \overset{*}{\rightharpoonup} J\,u$. Dann wende man das Resultat des 1. Schrittes an.

Warnung: In unendlichdimensionalen Räumen gilt der Satz von Bolzano-Weierstraß *nicht*: Eine beschränkte Folge muss nicht notwendig eine konvergente Teilfolge enthalten bzw. eine unendliche und beschränkte Menge muss nicht notwendig mindestens einen Häufungspunkt enthalten. Behoben wird dieser Missstand durch die schwache Folgenkompaktkeit in reflexiven Räumen; siehe Vorbemerkung. Man kann sogar zeigen: Ein Banachraum ist genau dann endlichdimensional, wenn die abgeschlossene Einheitskugel stark (bzgl. der Norm) kompakt ist. Und: Ein Banachraum ist genau dann reflexiv, wenn die abgeschlossene Einheitskugel schwach folgenkompakt ist; siehe Heuser, Funktionalanalysis, Seite 372, bzw. den Satz von Eberlein-Shmulyan in Yosida, Seite 141.

e) Man zeige: In einem Hilbertraum konvergiert das Skalarprodukt einer schwach konvergenten mit einer stark konvergenten Folge stark gegen das Skalarprodukt der Grenzelemente, d. h.

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{und} \quad v_n \to v \Longrightarrow (u_n, v_n) \to (u,v) \quad \text{für} \quad n \to \infty\,.$$

Bemerkung: Man kann sich die schwache Konvergenz vorstellen als eine Verallgemeinerung der Konvergenz aller Koordinaten, wie wir sie aus endlichdimensionalen Räumen kennen. Im unendlichdimensionalen Fall ersetzt man dabei die Koordinaten eines Punktes $x \in U$ durch die Werte (f, x) für $f \in U^*$.

2) Normen sind in unendlichdimensionalen Banachräumen im Allgemeinen nicht schwach folgenstetig

Man zeige:

a) In jedem normierten Raum ist die Norm stetig (stark folgenstetig),

b) in *endlich*-dimensionalen Räumen ist sie auch stets schwach folgenstetig,

c) dies gilt aber nicht in allgemeinen *unendlich*-dimensionalen Räumen.

Hinweis zu b): Man zeige, in endlich-dimensionalen Räumen sind starke und schwache Konvergenz äquivalent.

Hinweis zu c): Man betrachte im unendlich-dimensionalen Hilbertraum $H = L^2(-\pi, \pi)$ das Funktional $f(u) = \|u\|$ sowie die Folge $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $u_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(n\,\pi)$; siehe Vorlesung §2.4.2.

Bemerkungen: Es gibt aber auch *unendlich*dimensionale Räume, in denen starke und schwache Konvergenz übereinstimmen. Ein Beispiel findet man in Ljusternik, L. A., Sobolew, W. I.: *Elemente der Funktionalanalysis*, Zürich: Verlag Harry Deutsch, 1999, Seite 149.

Von Kadez stammt das Resultat: In separablen Räumen kann man eine äquivalente Norm einführen, für die gilt:

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{und} \quad \|u_n\| \to \|u\| \Rightarrow u_n \to u\,,$$

siehe Ljusternik, Sobolev, S. 149.

Man beachte übrigens, dass der mithilfe von Umgebungen definierte Begriff der Stetigkeit mit der Folgenstetigkeit nur für metrische Räume äquivalent ist. Für toplogische Räume impliziert die Stetigkeit die Folgenstetigkeit, die Umkehrung gilt jedoch nicht; siehe Heuser, Funktionalanalysis, Seite 344.

3) Eine wichtige konvexe und abgeschlossene Menge

Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein Lipschitz-Gebiet und $u_a \in L^2(\Omega)$ und $u_b \in L^2(\Omega)$.

> Man zeige, dass die Menge der zulässigen Steuerungen unter sogenannten Box-Beschränkungen,
>
> $$U_{\text{ad}} = \{u \in L^2(\Omega) \colon u_a(x) \le u(x) \le u_b(x) \text{ fast überall in } \Omega\}\,,$$
>
> konvex und abgeschlossen ist.
>
> *Hinweise:* Zum Beweis der Abgeschlossenheit benötigt man ein leicht einsehbares Resultat der Funktionalanalysis: Wegen der Vollständigkeit der Räume $L^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, besitzt jede Cauchy-Folge in $L^p(\Omega)$ eine konvergente Teilfolge, welche auf Ω sogar fast überall punktweise gegen die Grenzfunktion konvergiert; siehe z. B. Adams, Corollary 2.11, S. 27, oder Alt, Lemma 1.18, S. 52.

Bemerkungen: Konvexe und abgeschlossene Mengen M in normierten Räumen spielen bei Beweisen von Existenzaussagen für partielle Differentialgleichungen bzw. für Optimalsteuerungsprobleme deswegen eine große Rolle, weil sie schwach folgenabgeschlossen sind, d. h.

$$u_n \in M \wedge u_n \rightharpoonup u \Rightarrow u \in M\,,$$

siehe Theorem 2.8 der Vorlesung bzw. Alt, Satz 6.12, S. 224. Beschränkte Mengen M reflexiver Banachräume U, darunter fallen alle Hilberträume, sind dagegen nur relativ schwach folgenkompakt, d. h.

$$\forall \{u_n\}_{n=1}^{\infty}\,(u_n \in M)\,\exists \{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \colon u_{n_k} \rightharpoonup u \Rightarrow u \in U\,,$$

was aber nicht notwendigerweise auch $u \in M$ nach sich ziehen muss; siehe Theorem 2.7 der Vorlesung. Es fehlt die Folgenabgeschlossenheit.

Folgerung: Zusammen mit den Aufgaben 1b und 2c sieht man: Eine schwach folgenabgeschlossene Menge ist stets (stark) abgeschlossen, aber eine (stark) abgeschlossene Menge muss nicht schwach folgenabgeschlossen sein, wie das Beispiel mit den Sinusfunktionen zeigt.

4) Ein wichtiges konvexes Funktional

Es seien $\{Y, \|\cdot\|_Y\}$ und $\{U, \|\cdot\|_U\}$ Hilberträume. Es seien $y_d \in Y$, $\lambda > 0$ und $S\colon U \to Y$ ein linearer stetiger Operator.

Man zeige, dass das Funktional

$$f(u) = \|S\,u - y_d\|_Y^2 + \lambda\,\|u\|_U^2$$

streng konvex ist.

Bemerkungen: Wie wir in der Bemerkung zu Aufgabe 2 gesehen haben sind Normen in Banachräumen stets stetig, in endlichdimensionalen sogar schwach folgenstetig, *können* in unendlichdimensionalen Räumen aber *nicht* schwach folgenstetig sein. Allerdings sind konvexe und stetige Funktionale und damit auch Normen schwach nach unten halbstetig: Siehe Theorem 2.9 der Vorlesung, das ein Spezialfall des Satzes 24 aus Göpfert, A.: *Mathematische Optimierung in allgemeinen Vektorräumen*, Leipzig: Teubner, 1973, Seite 88, ist bzw. speziell für Normen Aufgabe 1c.

Da das obige Funktional offensichtlich auch stetig ist, ist es nach Theorem 2.9 schwach nach unten halbstetig, d. h.

$$u_n \rightharpoonup u \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} f(u_n) \geq f(u)\,.$$

Dieses Resultat geht entscheidend in den Beweis der Existenz einer optimalen Lösung des quadratischen Optimierungsproblems 2.5.15 ein, mithilfe dessen die Existenzbeweise für die Modell-Optimalsteuerungsaufgaben aus der Vorlesung geführt werden.