Prof. Dr. H. J. Pesch
Lehrstuhl für Ingenieurmathematik
Universität Bayreuth

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen
Optimal Control of Partial Differential Equations
(Teil 1: WS 2011/12)

6. Übung

Vorbemerkung:

Mit diesem Übungsblatt sollen einige funktionalanalytische Grundbegriffe für lineare Operatoren und lineare Funktionale anhand von Beispielen veranschaulicht werden: Äquivalenz von Stetigkeit und Beschränktheit linearer Operatoren, Normen von Operatoren und Funktionen sowie wichtige Ungleichungen, insbesondere die Höldersche Ungleichung mit einem Ausblick auf die Dualräume der Funktionenräume $L^p(\Omega)$.

1) Ein Integraloperator

Es seien im Folgenden $\{U, \|\cdot\|_U\}$ und $\{V, \|\cdot\|_V\}$ lineare normierte Räume und $A \in \mathcal{L}(U, V)$ ein linearer und stetiger Operator von U nach V.

a) Wir definieren für diese Teilaufgabe speziell in $U = V = C[0,1]$ mit der Maximumnorm $\|u\|_{C[0,1]} := \max_{t\in[0,1]} |u(t)|$ den Integraloperator

$$(A\,u)(t) = \int_0^1 e^{t-s}\, u(s)\,\mathrm{d}s\,, \quad t \in [0,1]\,.$$

Man zeige: $A \in \mathcal{L}(U, U)$.

b) Man zeige, dass die Zahl

$$\|A\| := \sup_{\|u\|_U = 1} \|A\,u\|_V$$

für jedes $A \in \mathcal{L}(U, V)$ die Normaxiome erfüllt.

c) Man zeige: Die Zahl $c = \|A\|$ ist die kleinste Zahl, so dass

$$\|A\,u\|_V \le c\,\|u\|_U \quad \text{für alle} \quad u \in U\,.$$

d) Man berechne die Norm des oben definierten Integraloperators.

2) Ein Multiplikationsoperator

Es seien wieder $\{U, \|\cdot\|_U\}$ und $\{V, \|\cdot\|_V\}$ lineare normierte Räume und $A \in \mathcal{L}(U,V)$. Wir wählen jetzt $U = V = L^\infty(\Omega)$ und eine feste Funktion $a \in L^\infty(\Omega)$ sowie den Operator

$$(A\,u)(x) = a(x)\,u(x)\,.$$

a) Man zeige: A ist beschränkt. Lässt sich die erhaltene Abschätzung noch weiter verbessern?

b) Man illustriere das Ergebnis aus a) mithilfe der Funktion $a(x) = x^2$ für $\Omega = (0,1)$ und berechne $\|A\|$.

3) Ein lineares Funktional

Wir betrachten das lineare Funktional $f(u) = u(\frac{1}{2})$ in $U = C[0,1]$.

Man zeige: f ist beschränkt und $\|f\|_{U^*} = 1$.

4) Die Höldersche Ungleichung und Anwendungen. Ausblick auf die Dualräume von $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$

a) Es sei $f \in L^p(\Omega)$ und $g \in L^q(\Omega)$ mit $1 \le p < \infty$ und $1 < q \le \infty$ sowie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Man nennt q den zu p *konjugierten Index*. Dabei ist $\frac{1}{q} = 0$ zu setzen, wenn $p = 1$ und $q = \infty$ ist.

Man zeige: Es gilt: $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ und die *Höldersche Ungleichung*

$$\|f \cdot g\|_{L^1(\Omega)} \le \|f\|_{L^p(\Omega)}\,\|g\|_{L^q(\Omega)}\,.$$

Hinweise:

1. Man zeige zunächst: Für $0 < \lambda < 1$ und $\alpha \ge 0$ sowie $\beta \ge 0$ gilt stets

$$\alpha^\lambda\,\beta^{1-\lambda} \le \lambda\,\alpha + (1-\lambda)\,\beta\,.$$

   Dazu wende man den Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf die Funktion $t^{1-\lambda}$ an.

2. Zum Beweis der Hölderschen Ungleichung untersuche man zunächst den Fall $p = 1$, d. h. $q = \infty$.

3. Für den Fall $0 < p\,, q < \infty$ untersuche man zunächst den Fall $f = 0$ oder $g = 0$ fast überall.

   Für $f \neq 0$ und $g \neq 0$ fast überall setze man dann in der obigen Ungleichung

$$\alpha := \frac{|f(x)|^p}{\|f\|^p_{L^p(\Omega)}}\,, \quad \beta := \frac{|g(x)|^q}{\|g\|^q_{L^q(\Omega)}}\,, \quad \lambda := \frac{1}{p}\,.$$

b) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ messbar, $1 < p < \infty$ und $1 < q < \infty$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt. Dann ist durch

$$T\colon L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)^* \quad \text{mit} \quad \langle Tg, f\rangle_{L^p(\Omega)^*, L^p(\Omega)} := \int\limits_\Omega g(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x$$

eine Abbildung definiert.

Man zeige: Die Abbildung T ist linear, stetig, injektiv und isometrisch.

Hinweise:

1. Zum Beweis der Stetigkeit: Man setze $S_g = Tg$, $S_g \in L^p(\Omega)^*$, für beliebiges $g \in L^q(\Omega)$ und dann schätze $\sup_{\|f\|_{L^p(\Omega)}=1} |\langle S_g, f\rangle|$ nach oben ab für alle $f \in L^p(\Omega)$.
2. Zum Beweis der Isometrie ist noch $\|Tg\|_{L^p(\Omega)^*} \geq \|g\|_{L^q(\Omega)}$ nachzuweisen, da $\|Tg\|_{L^p(\Omega)^*} \leq \|g\|_{L^q(\Omega)}$ bereits beim Beweis der Stetigkeit abgefallen ist. Für diese Abschätzung setze man $f(x) = g(x)|g(x)|^{q-2}$, falls $g(x) \neq 0$, andernfalls setze man $f(x) = 0$, falls $g(x) = 0$. Man zeige zunächst $|\langle S_g, f\rangle| = \|g\|_{L^q(\Omega)}\, \|f\|_{L^p(\Omega)}$ und schätze diesmal $\sup_{\|f\|_{L^p(\Omega)}=1} |\langle S_g, f\rangle|$ nach unten ab.

Bemerkung: $\langle \cdot, \cdot\rangle$ stellt nur für $p = q = 2$ ein Skalarprodukt dar.

Bemerkungen: Aufbauend auf Teil b) der Aufgabe kann man beweisen, dass jedes stetige lineare Funktional $S_g := T(g) = Tg \in L^p(\Omega)^*$, $1 < p < \infty$, mit $g \in L^q(\Omega)$ durch genau eine Funktion $f \in L^p(\Omega)$ in der Form

$$T(g)(f) = Tg(f) = \langle Tg, f\rangle =: S_g(f) = \int\limits_\Omega g(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x\,, \quad f \in L^p(\Omega)\,,$$

dargestellt werden kann. Damit folgt dann sofort:

$$L^p(\Omega)^* \cong L^q(\Omega)\,.$$

Dazu muss noch bewiesen werden, dass die oben definierte Abbildung T ein Isomorphismus ist; siehe z. B. Alt, Satz 4.12, Seite 159ff. Die Homomorphieeigenschaft folgt sofort aus der Linearität; die Surjektivität erfordert die Anwendung des Satzes von Radon-Nikodym aus der Maßtheorie; siehe Alt, Satz 4.11, Seite 157f. Isomorphe Räume unterscheiden sich im Grunde nur durch die Namen ihrer Elemente. Deshalb kann man sich die Freiheit nehmen, isomorphe Räume einfach zu identifizieren.

Im Falle $p = 2$ stellt die Abbildung T ein Skalarprodukt dar, und die spezielle Aussage $L^2(\Omega)^* = L^2(\Omega)$ kann mithilfe des Darstellungssatzes von Riesz relativ einfach bewiesen werden.

Wegen der Symmetrie zwischen Index p und konjugiertem Index q sind die Funktionenräume $L^p(\Omega)$ für $1 < p < \infty$ reflexiv, d. h. $L^p(\Omega)^{**} = L^p(\Omega)$. Diese Aussage gilt *nicht* für $p = 1$ und $p = \infty$. Es gilt zwar $L^1(\Omega)^* = L^\infty(\Omega)$, aber $L^\infty(\Omega)^* \neq L^1(\Omega)$, d. h. $L^1(\Omega)$ und $L^\infty(\Omega)$ sind nicht reflexiv.

Eine elementare Einführung in die L^p-Räumen ausgehend von Lebesgue-integrierbaren Funktionen der Klasse $L^p[a, b]$ über kompakten Intervallen bis hin zu den Unterschieden für Funktionen $L^p(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, findet man in E. Pflaumann, H. Unger: *Funktionalanalysis I*, Mannheim: Bibliographisches Institut, 1968, Seiten 182ff.

Abgabe: Lösungsvorschläge zu den Aufgaben werden vorgerechnet oder ausgeteilt.