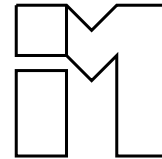




Prof. Dr. H. J. Pesch
Lehrstuhl für Ingenieurmathematik
Universität Bayreuth



Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen Optimal Control of Partial Differential Equations (Teil 1: WS 2011/12)

5. Übung

1) Differentialoperatoren in Divergenzform

Die in der Vorlesung und in Übung 4, Aufgabe 3 betrachteten Randwertprobleme sind Spezialfälle der Aufgabenstellung

$$\begin{aligned}\mathcal{A}y + c_0 y &= f && \text{in } \Omega, \\ \partial_{\nu_{\mathcal{A}}}y + \alpha y &= g && \text{auf } \Gamma_1, \\ y &= 0 && \text{auf } \Gamma_0,\end{aligned}$$

in der \mathcal{A} ein elliptischer Differentialoperator der folgenden Form ist:

$$\mathcal{A}y(x) = - \sum_{i,j=1}^N D_i \left(a_{ij}(x) D_j y(x) \right).$$

Die Koeffizientenfunktionen a_{ij} von \mathcal{A} sollen aus $L^\infty(\Omega)$ sein, der Symmetriebedingung $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ in Ω genügen sowie mit einem $\alpha_0 > 0$ die *Bedingung der gleichmäßigen Elliptizität*

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha_0 |\xi|^2$$

für alle Vektoren $\xi \in \mathbb{R}^N$ und alle $x \in \Omega$ erfüllen. Mit $\partial_{\nu_{\mathcal{A}}}$ bezeichnen wir in diesem allgemeineren Fall die Ableitung in Richtung der *Konormalen* $\nu_{\mathcal{A}}$, definiert durch

$$(\nu_{\mathcal{A}})_i(x) = \sum_{j=1}^N a_{ij}(x) \nu_j.$$

Fassen wir die Koeffizienten a_{ij} zu einer Matrix A zusammen, so gilt $\nu_A = A\nu$.

Der Rand Γ ist durch $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ in zwei disjunkte messbare Teilmengen Γ_0 und Γ_1 aufgeteilt, wobei eine der beiden Teilmengen leer sein kann. Für die in der Aufgabenstellung auftretenden Funktionen gelte: $c_0 \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, $\alpha \in L^\infty(\Gamma_1)$ und $g \in L^2(\Gamma_1)$.

- a) Man leite eine Variationsformulierung für diese Aufgabe her. Was ist der adäquate Funktionenraum V für die schwache Lösung y ? Wie definiert man Bilinear- und Linearform, die die schwache Lösung y eindeutig bestimmen?

Hinweis: Man verwende für die partielle Integration die Greensche Formel

$$\int_{\Omega} u_1 \Delta u_2 + \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \, dx = \int_{\partial\Omega} u_1 \nu \cdot \nabla u_2 \, ds.$$

Hierbei sind $u_i: \mathbb{R}^N \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, Skalarfelder und $\nu \in \mathbb{R}^N$ bezeichne wie üblich den äußeren Normalenvektor im Punkte x . Man wähle $u_1 = v$. Wie wählt man dann ∇u_2 ?

- b) Es sei Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Fast überall auf Ω bzw. auf Γ_1 gelte $c_0(x) \geq 0$ bzw. $\alpha(x) \geq 0$ und eine der beiden folgenden Bedingungen

$$|\Gamma_0| > 0,$$

$$\Gamma_1 = \Gamma \quad \text{und} \quad \int_{\Omega} c_0^2(x) \, dx + \int_{\Gamma} \alpha^2(x) \, ds > 0.$$

Dann besitzt die obige Randwertaufgabe für alle Paare $(f, g) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_1)$ genau eine schwache Lösung $y \in V$. Außerdem existiert genau eine von f und g unabhängige Konstante $c_A > 0$, so dass gilt

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} \leq c_A (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_1)}) \quad \forall f \in L^2(\Omega), \forall g \in L^2(\Gamma_1).$$