Prof. Dr. H. J. Pesch
Lehrstuhl für Ingenieurmathematik
Universität Bayreuth

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen
Optimal Control of Partial Differential Equations
(Teil 1: WS 2011/12)

5. Übung

1) Differentialoperatoren in Divergenzform

Die in der Vorlesung und in Übung 4, Aufgabe 3 betrachteten Randwertprobleme sind Spezialfälle der Aufgabenstellung

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\,y + c_0\,y &= f && \text{in } \Omega\,,\\ \partial_{\nu_\mathcal{A}} y + \alpha\,y &= g && \text{auf } \Gamma_1\,,\\ y &= 0 && \text{auf } \Gamma_0\,, \end{aligned}$$

in der $\mathcal{A}$ ein elliptischer Differentialoperator der folgenden Form ist:

$$\mathcal{A}\,y(x) = -\sum_{i,j=1}^{N} D_i\Big(a_{ij}(x)\,D_j y(x)\Big)\,.$$

Die Koeffizientenfunktionen a_{ij} von $\mathcal{A}$ sollen aus $L^\infty(\Omega)$ sein, der Symmetriebedingung $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ in Ω genügen sowie mit einem $\alpha_0 > 0$ die *Bedingung der gleichmäßigen Elliptizität*

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \geq \alpha_0\,|\xi|^2$$

für alle Vektoren $\xi \in \mathbb{R}^N$ und alle $x \in \Omega$ erfüllen. Mit $\partial_{\nu_\mathcal{A}}$ bezeichnen wir in diesem allgemeineren Fall die Ableitung in Richtung der *Konormalen* $\nu_\mathcal{A}$, definiert durch

$$(\nu_\mathcal{A})_i(x) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x)\,\nu_j\,.$$

Fassen wir die Koeffizienten a_{ij} zu einer Matrix A zusammen, so gilt $\nu_{\mathcal{A}} = A\,\nu$.

Der Rand Γ ist durch $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ in zwei disjunkte messbare Teilmengen Γ_0 und Γ_1 aufgeteilt, wobei eine der beiden Teilmengen leer sein kann. Für die in der Aufgabenstellung auftretenden Funktionen gelte: $c_0 \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, $\alpha \in L^\infty(\Gamma_1)$ und $g \in L^2(\Gamma_1)$.

a) Man leite eine Variationsformulierung für diese Aufgabe her. Was ist der adäquate Funktionenraum V für die schwache Lösung y? Wie definiert man Bilinear- und Linearform, die die schwache Lösung y eindeutig bestimmen?

Hinweis: Man verwende für die partielle Integration die Greensche Formel

$$\int\limits_\Omega u_1\,\Delta u_2 + \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\partial\Omega} u_1\,\nu \cdot \nabla u_2 \,\mathrm{d}s\,.$$

Hierbei sind $u_i\colon \mathbb{R}^N \supset \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, Skalarfelder und $\nu \in \mathbb{R}^N$ bezeichne wie üblich den äußeren Normalenvektor im Punkte x. Man wähle $u_1 = v$. Wie wählt man dann ∇u_2?

b) Es sei Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Fast überall auf Ω bzw. auf Γ_1 gelte $c_0(x) \geq 0$ bzw. $\alpha(x) \geq 0$ und eine der beiden folgenden Bedingungen

$$|\Gamma_0| > 0\,,$$

$$\Gamma_1 = \Gamma \quad \text{und} \quad \int\limits_\Omega c_0^2(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_\Gamma \alpha^2(x)\,\mathrm{d}s > 0\,.$$

Dann besitzt die obige Randwertaufgabe für alle Paare $(f, g) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_1)$ genau eine schwache Lösung $y \in V$. Außerdem existiert genau eine von f und g unabhängige Konstante $c_{\mathcal{A}} > 0$, so dass gilt

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} \leq c_{\mathcal{A}} \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_1)} \right) \quad \forall\, f \in L^2(\Omega)\,, \forall\, g \in L^2(\Gamma_1)\,.$$