Prof. Dr. H. J. Pesch
Lehrstuhl für Ingenieurmathematik
Universität Bayreuth

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

Optimal Control of Partial Differential Equations

(Teil 1: WS 2011/12)

4. Übung

Vorbemerkung:

Eine etwas versteckte Schwierigkeit besteht in der Definition von Randwerten für Funktionen aus Sobolewräumen. Was soll z. B. bei einer Funktion $y \in W^{k,p}(\Omega)$ die Aussage $y = 0$ auf $\Gamma = \partial\Omega$ bedeuten? Ist nämlich $y \in L^p(\Omega)$, so kann man die Randwerte von y auf Γ beliebig abändern, ohne dass sich y im Sinne des Raumes $L^p(\Omega)$ ändert, denn Γ ist als Teilmenge des $\mathbb{R}^N$ vom Maße Null. Funktionen, die sich nur auf Mengen vom Maß Null unterscheiden, sind aber gleich im Sinne von $L^p(\Omega)$, d. h. gehören der gleichen Äquivalenzklasse an. Dieses Problem wird in der ersten Aufgabe näher untersucht und führt auf den Spuroperator und den Spursatz, zu dem wir schrittweise Vorbereitungen zu einem Beweis erbringen werden. In einem Ausblick skizzieren wir, wie wir zu einem vollen Beweis des Spursatzes kommen können.[1]

Mithilfe des Spursatzes und den nachfolgenden Aufgaben kann man dann die Resultate aus der Vorlesung hinsichtlich Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen auf allgemeinere elliptische Randwertaufgaben erweitern.

[1] Der Spursatz hat übrigens Auswirkungen bei der Konstruktion von Zelten. Anstatt an der Spitze eines Mastes hängt man das Zelt am Rande eines „Tellers“ auf, zum Beispiel bei der Jurte. Eine andere Möglichkeit besteht darin, das Zelt zur Vermeidung extremer Spannungen an der Spitze mit einer Leine in Form einer Schlaufe zu versehen. Dadurch wird vermieden, dass die Aufhängung nicht an einem Punkt, sondern an der vom „Tellerrand“ oder von der Schlaufe gebildeten Linie wirksam wird. Dass dies sinnvoll ist, liegt letzten Endes am Spursatz (Theorem 2.1 in § 2.2.3): Die Auswertung einer H^1-Funktion an einem Punkt macht keinen Sinn, die Auswertung im L^2-Sinne längs einer Linie wird jedoch fast überall respektiert.

1) Spursatz (Spezialfall)

a) (Vorbetrachtung)

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Lipschitzgebiet.

Man zeige: Die Aussage, es gibt eine Konstante $c_\tau(\Omega) > 0$ derart, dass

$$\|u\|_{L^p(\Gamma)} \leq c_\tau \, \|u\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{für alle} \quad u \in C^0(\bar{\Omega})\,.$$

ist falsch.

Hinweis: Man konstruiere ein Gegenbeispiel für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, indem man eine auf $\bar{\Omega}$ stetige Funktion angebe, die auf Γ konstant, aber ungleich null ist, und im Innern größtenteils null ist. Die Flanken zum Rand des Gebietes sollen dabei wie $\frac{1}{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, ansteigen.

b) (Vorbereitungen zu einem Beweis des Spursatzes)

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Lipschitzgebiet.

Man zeige: Die Abbildung

$$\tau \colon C^1(\bar{\Omega}) \to L^2(\Gamma) \quad \text{mit} \quad \tau(u) = u|_\Gamma$$

genügt der Abschätzung

$$\|\tau(u)\|_{L^2(\Gamma)} \leq c_\tau \, \|u\|_{H^1(\Omega)}\,.$$

Hinweise: Den nicht einfachen Beweis wollen wir uns schrittweise erarbeiten:

<u>1. Schritt:</u> Da Ω ein Lipschitzgebiet im $\mathbb{R}^2$ ist, gibt es gemäß Definition endlich viele Randstücke $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_M$ mit geeigneten Parametrisierungen $h_i \in C^{0,1}$ sowie positiven Konstanten a, b, so dass nach geeigneten lokalen Koordinatentransformationen die Gebiete

$$\Omega_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon h_i(y) < x < h_i(y) + b\,,\ |y| < a\}$$

in Ω enthalten sind und mit Ω in Γ_i ein gemeinsames Randstück haben — das sind die Teilgebiete Ω_i von Ω, die an Γ_i angrenzen; vgl. Definition „Lipschitzgebiet“ bzw. „Reguläres Gebiet“ in Kapitel 2.2.2.

<u>2. Schritt:</u> Man wähle $u \in C^1(\bar{\Omega})$ und $(x,y) \in \Gamma$ beliebig. Dann gilt mit $0 \leq t \leq b$:

$$u(x,y) = u(h_i(y),y) = u(h_i(y)+t,y) - \int_0^t u_x(h_i(y)+s,y)\,\mathrm{d}s\,,$$

wobei u_x die partielle Ableitung von u nach der ersten Komponente bezeichnet. Man zeige durch Integration über t, $0 < t < b$:

$$b\,u(h_i(y),y) = \int_0^b u(h_i(y)+t,y)\,\mathrm{d}t - \int_0^b u_x(h_i(y)+s,y)\ (b-s)\ \mathrm{d}s\,.$$

3. Schritt: Man quadriere diese Gleichung und zeige durch Abschätzungen mit der Youngschen Ungleichung, d. i. $(a+b)^2 \le 2\,a^2 + 2\,b^2$, sowie der Ungleichung von Cauchy-Schwarz, dass

$$b^2\, u^2(h_i(y),y) \le 2\cdot b \left(\int_0^b u^2(h_i(y)+t,y)\,\mathrm{d}t \right) + \frac{2}{3}\cdot b^3 \left(\int_0^b u_x^2(h_i(y)+s,y)\,\mathrm{d}s \right)$$

gilt.

4. Schritt: Division durch b^2, anschließende Integration über y, $-a \le y \le +a$, und Variablensubstitutionen $x = h_i(y)+t$ bzw. $x = h_i(y)+s$) liefert:

$$\int_{-a}^{+a} u^2(h_i(y),y)\,\mathrm{d}y \le \frac{2}{b} \int_{\Omega_i} u^2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{2}{3}\,b \int_{\Omega_i} u_x^2(x,y)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y\,.$$

5. Schritt: Man forme die linke Seite in ein Kurvenintegral längs Γ_i um und schätze dieses nach unten ab. Insgesamt erhält man damit

$$\int_{\Gamma_i} u^2(h_i(y),y)\,\mathrm{d}s \le c_i\, \left[\frac{2}{b}\,\|u^2\|_{L^2(\Omega_i)} + \frac{2}{3}\,b\,\|u_x^2\|_{L^2(\Omega_i)} \right]$$

mit

$$c_i := \operatorname*{esssup}_{-a\le y\le a} \left\{ \sqrt{1+h_i'(y)^2} \right\}\,.$$

Hier muss man den Satz von Rademacher beachten, nach dem jede lipschitzstetige Funktion fast überall differenzierbar und zudem eine L^∞-Funktion ist.

6. Schritt: Summation über alle Kurvenstücke Γ_i mit $\cup_{i=1}^M \Gamma_i = \Gamma$ und den zugehörigen Gebieten Ω_i mit $\cup_{i=1}^M \Omega_i \subset \Omega$ liefert:

$$\|u^2\|^2_{L^2(\Gamma)} \le c^2\,\|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

mit

$$c^2 := \max\{\sum_{i=1}^M c_i\,\frac{2}{b}\,,\ \sum_{i=1}^M c_i\,\frac{2}{3}\,b\}\,.$$

Bemerkungen:

1. Hinweise zum Beweis des allgemeinen Spursatzes werden bei der Aufgabenbesprechung gegeben.

2. Für beschränkte Lipschitzgebiete Ω folgt daher

$$H_0^1(\Omega) = \{y \in H^1(\Omega) \colon y|_\Gamma = 0\}\,.$$

   Man kann in $H_0^1(\Omega)$ durch

$$\|y\|_{H_0^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega |\nabla y|^2 \,\mathrm{d}x$$

   eine Norm einführen, die zur $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ äquivalent ist:

$$c_1\,\|y\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|y\|_{H^1(\Omega)} \leq c_2\,\|y\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{mit} \quad c_1 > 0 \text{ und } c_2 > 0\,.$$

   Dies kann mit der Friedrichs-Ungleichung — Übung 2, Aufgabe 1c — bewiesen werden.

3. Die Spurabbildung τ generiert mit Hilfe der zugrundgelegten Funktionenräume über der Menge Ω neue Funktionenräume über dem Rand $\Gamma = \partial\Omega$:

$$H^{1/2}(\Gamma) := \{w \in L^2(\Gamma) \colon \text{es existert ein } v \in H^1(\Omega) \text{ mit } w = \tau\, v\}\,.$$

   Als Norm eignet sich dabei

$$\|w\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \inf\{\|v\|_{H^1(\Omega)} \colon v \in H^1(\Omega) \text{ mit } w = \tau\, v\}\,.$$

4. Der Spursatz impliziert mit der Definition der Räume $W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ auch

$$\begin{aligned} &\tau\, u = 0 \quad \text{für alle} \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega)\,, \\ &\tau\, D^\alpha u = 0 \quad \text{für alle} \quad u \in W_0^{k,p}(\Omega)\,,\ |\alpha| \leq k-1\,. \end{aligned}$$

5. Ist Ω ein beschränktes Gebiet, dann gibt es eine Konstante $c = c(\Omega) > 0$ derart, dass

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c\,|v|_{W^{1,2}(\Omega)} = c\,|v|_{H^1(\Omega)} \quad \text{für alle} \quad v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

   Diese Gleichung ist im wesentlichen der zweite Teil der Ungleichung von Friedrichs; vgl. Übung 2, Aufgabe 1; die linke Seite dieser Ungleichung ist offensichtlich kleiner als die linke Seite der rechten Ungleichung der Friedrichsschen Ungleichung.

2) Verallgemeinerte Poincaré-Friedrichs'sche Ungleichungen

Von den verschiedenen Varianten der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung soll hier eine bewiesen werden.

Man zeige: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Lipschitzgebiet und $\Gamma_1 \subset \Gamma$ eine messbare Menge mit $|\Gamma_1| > 0$, so existiert eine von $y \in H^1(\Omega)$ unabhängige Konstante $c(\Gamma_1)$, so dass für alle $y \in H^1(\Omega)$ gilt:

$$\|y\|^2_{H^1(\Omega)} \leq c(\Gamma_1) \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla y|^2 \,\mathrm{d}x + \int\limits_{\Gamma_1} y^2 \,\mathrm{d}s \right) .$$

Erläuterungen: Zum Beweis benötigt man die fundamentalen Einbettungssätze von Sobolewräumen, speziell den Satz:

$$H^1 \hookrightarrow H^0\,, \text{ lies: } H^1 \text{ ist stetig und kompakt eingebettet in } H^0\,,$$

siehe z. B. Alt, H. W.: Lineare Funktionalanalysis, 4. Auflage, Berlin: Springer, 2002, S. 312ff.

Die Sobolewräume bilden nämlich eine Inklusionsskala:

$$\begin{array}{ccccccccc} L_2(\Omega) & = & H^0(\Omega) & \supset & H^1(\Omega) & \supset & H^2(\Omega) & \supset & \dots \\ & & \| & & \cup & & \cup & & \\ & & H^0_0(\Omega) & \supset & H^1_0\Omega) & \supset & H^2_0(\Omega) & \supset & \dots \end{array}$$

Zur Erläuterung der obigen Begriffe zunächst drei Definitionen:

Definition 1: Es seien X und Y Banachräume mit $X \subset Y$. Offenbar ist die mit I bezeichnete Inklusion $I\colon x \in X \to x \in Y$ eine lineare Abbildung. Wenn sie beschränkt (äquivalent mit stetig bei linearen Abbildungen) ist, d. h. wenn

$$I \in \mathcal{L}(X,Y) \quad \text{oder} \quad \|x\|_Y \leq C\,\|x\|_X \quad \text{für alle } x \in X\,,$$

nennt man X *stetig eingebettet* in Y. Offensichtlich ist $H^1(\Omega)$ stetig in $H^0(\Omega)$ eingebettet, da $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)} = \|\cdot\|_{H^0(\Omega)} \leq C\,\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

Definition 2: Eine Teilmenge K eines Banachraumes heißt *präkompakt* (bzw. *kompakt*), wenn jede Folge $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $\{x_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ enthält (und $\lim_{k\to\infty} x_{i_k} \in K$).

Definition 3: Es seien X und Y Banachräume. Die Abbildung $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ heißt *kompakt*, wenn $\{T\,x\colon x \in X\,,\ \|x\|_X \leq 1\}$ (Bild der Einheitskugel in X) präkompakt in Y ist.

Hinweise: Man beweist die Ungleichung am besten indirekt. Nehmen Sie dazu eine Folge $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $y_n \in H^1(\Omega)$, mit $\|y_n\|_{H^1(\Omega)} = 1$ an, so dass die Ungleichung verletzt ist, also z. B.

$$1 = \|y_n\|^2_{H^1(\Omega)} > n \left(\int_\Omega |\nabla y|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1} y^2 \,\mathrm{d}s \right) .$$

Zeigen Sie dann, dass

$$\begin{aligned}
&\nabla y_n \to 0 \quad \text{in } L^2(\Omega)\,,\\
&\exists \{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \to y \quad \text{in } H^0(\Omega)\,,\\
&\exists \{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \to y \quad \text{in } H^1(\Omega)\,,\\
&\nabla y \equiv 0 \quad \text{und} \quad y \equiv \text{const}\,,\\
&y \equiv 0 \qquad \text{(Spursatz verwenden!)}\,.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Die Friedrichs-Ungleichung (Übung 2, Aufgabe 1c) ergibt sich als Spezialfall mit $\Gamma_1 := \Gamma$ und Funktionen $y \in H^1_0(\Omega)$.

Eine ähnliche Beziehung gilt in Teilmengen von Ω: Ist $E \subset \Omega$ eine Menge von positivem Maß, dann existiert eine von $y \in H^1(\Omega)$ unabhängige Konstante c_E, so dass die Ungleichung

$$\|y\|^2_{H^1(\Omega)} \le c_E \left(\int_\Omega |\nabla y|^2 \,\mathrm{d}x + \int_E y^2 \,\mathrm{d}x \right)$$

für alle $y \in H^1(\Omega)$ erfüllt ist; siehe Gajewski, H., Gröger, K., Zacharias, K.: Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen, Berlin: Akademie-Verlag, 1974. Dort findet man allerdings keinen Beweis. Die Gleichung lässt sich auch auf allgemeinere Sobolewräume $H^m(\Omega)$ verallgemeinern; siehe Wloka, J.: Partielle Differentialgleichungen, Stuttgart: Teubner, 1982, Satz 7.7, S. 121. Einen direkten Beweis findet man bei Weiying Zheng und He Qi: On Friedrichs-Poincaré-type inequalities, J. of Math. Anal. Appl. 304 (2005) 542–551.

3) Schwache Formulierungen bei elliptischen Randwertproblemen mit Randbedingungen dritter Art

Wir betrachten die Randwertaufgabe

$$-\Delta\, y + c_0\, y = f \qquad \text{in } \Omega\,,$$

$$\partial_\nu y + \alpha\, y = g \qquad \text{auf } \Gamma$$

mit gegebenen Funktionen $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in L^2(\Gamma)$ sowie nichtnegativen Koeffizientenfunktionen $c_0 \in L^\infty(\Omega)$ und $\alpha \in L^\infty(\Gamma)$.

Man leite eine Variationsformulierung für diese Aufgabe her.

Bemerkung: Randbedingungen 3. Art werden auch Robin- oder Cauchy-Bedingungen genannt.

4) Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen für ellipitische Randwertaufgaben dritter Art

a) Es seien ein beschränktes Lipschitzgebiet Ω sowie fast überall nichtnegative Funktionen $c_0 \in L^\infty(\Omega)$ und $\alpha \in L^\infty(\Gamma)$ vorgegeben mit

$$\int_\Omega c_0(x)^2\,\mathrm{d}x + \int_\Gamma \alpha(x)^2\,\mathrm{d}s > 0.$$

Dann besitzt die Randwertaufgabe dritter Art für jedes Paar $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma)$ genau eine schwache Lösung $y \in H^1(\Omega)$.

b) Ferner existiert eine von f und g unabhängige Konstante c_R, so dass die folgende Ungleichung gilt:

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} \le c_R\,\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}\right)\,.$$

Hinweis: Man verwende Aufgabe 3, das Lemma von Lax-Milgram, der Spursatz und die verallgemeinerten Poincaré-Friedrichs-Ungleichungen.