Prof. Dr. H. J. Pesch
Lehrstuhl für Ingenieurmathematik
Universität Bayreuth

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen
Optimal Control of Partial Differential Equations
(Teil 1: WS 2011/12)

3. Übung

Vorbemerkung:

In diesem Übungsblatt wird der Zusammenhang zwischen Randwertproblemen für elliptische partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung und gewissen Minimierungsproblemen aufgezeigt; siehe Aufgabe 1. Er bildet die Basis für die Finite-Element-Methode (nicht Gegenstand der Vorlesung), einer der wichtigsten numerischen Methoden zur Approximation der Lösung elliptischer und parabolischer Randwertaufgaben. Statt der partiellen Differentialgleichungen löst man dabei die Minimierungsprobleme, und zwar über endlichdimensionalen Funktionenräumen auf diskretisierten Gebieten. Man kann sich dabei zudem noch auf Funktionen geringerer Glattheit beschränken. Aus dem Zusammenhang zwischen partiellen Differentialgleichungen und assoziierten Minimierungsproblemen lassen sich aber auch auf relativ einfache Weise ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz für elliptische Aufgaben (Aufgabe 2) sowie der wichtige Darstellungssatz von Riesz (Aufgabe 3) gewinnen, aufgrund dessen man lineare Funktionale über einem Hilbertraum mit Vektoren aus diesem identifizieren kann.

In Aufgabe 4 wird schließlich das Lemma von der Abrundung der Ecken bewiesen, dass es erlaubt, gewisse Aussagen über Funktionale nur für stetige, stückweise stetig differenzierbare Funktionen zu beweisen. Ihre Übertragung auf glatte Funktionen liefert dann das Lemma von der Abrundung der Ecken.

Literatur zur Finiten-Elemente-Methode:

Braess, D: *Finite Elemente*, 3. Auflage, Berlin: Springer, 2003.

Großmann, C., Roos, H.-G.: *Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen*, 3. Auflage, Wiesbaden: Teubner, 2005.

1) Charakterisierungssatz

Es sei V ein linearer Raum und $a\colon V\times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische, positive Bilinearform, d. h. es sei $a(u,u) > 0$ für alle $u \in V$, $u \neq 0$. Ferner sei $F\colon V \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional.

Man zeige: Die Größe

$$J(v) := \frac{1}{2}\,a(v,v) - F(v)$$

nimmt in V ihr Minimum genau dann bei u an, wenn

$$a(u,v) = F(v) \quad \text{für alle } v \in V$$

gilt. Außerdem gibt es höchstens eine Minimallösung.

Hinweis: Man untersuche $J(u + t\,v)$ für $u \in V$, $v \in V$ und $t \in \mathbb{R}$.

2) Lemma von Lax-Milgram (Fassung für konvexe Mengen)

a) Es sei V eine abgeschlossene, konvexe Menge in einem Hilbert-Raum H und $a\colon H \times H \to \mathbb{R}$ eine stetige, symmetrische und elliptische Bilinearform. Eine Bilinearform a heißt stetig, wenn $|a(u,v)| \leq C\,||u||\,||v||$ für alle $u, v \in V$. Eine Bilinearform a heißt elliptisch, wenn mit einem $\alpha > 0$ gilt: $a(v,v) \geq \alpha\,||v||^2$ für alle $v \in H$.

Man zeige: Für jedes $F \in H^*$ mit $F(v) = (f,v)$ hat das Variationsproblem

$$J(v) := \frac{1}{2}\,a(u,v) - (f,v) \longrightarrow \min\,!$$

genau eine Lösung in V.

Hinweis: Man zeige zunächst: J ist nach unten beschränkt und setze $c_1 := \inf\{J(v)\colon v \in V\}$. Dann zeige man, dass jede Minimalfolge $\{v_n\}$ mit Elementen $v_n \in V$ eine Cauchy-Folge in H ist.

Bei der geforderten Abschätzung darf man nicht die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung verwenden, denn mit dem Lemma von Lax-Milgram wird erst in der Teilaufgabe b) die Existenz eines Riesz-Repräsentanten des linearen Funktionals F beweisen. Die Schreibweise $F(v) = (f,v)$ ist hier als *duality pairing* zu verstehen. Wohl dürfen wir aber die Stetigkeit der Abbildung F ausnutzen. Dazu wende man den folgenden Satz (Beweis in Kapitel 2.4 der Vorlesung[1]) an.

[1] Kapitel 2.4, S. 32, in Tröltzschs Buch

Es seien U und V lineare, normierte Räume. Eine lineare Abbildung $A\colon U \to V$ ist genau dann stetig, wenn sie beschränkt ist, d. h. wenn es eine von $u \in U$ unabhängige Konstante c_A gibt, so dass für alle $u \in U$ gilt:

$$\|A\,u\|_V \leq c_A\,\|u\|_U\,.$$

b) Rieszscher Darstellungsatz

Man zeige: Zu jedem $F \in H^*$ gibt es ein Element $u \in H$ mit

$$F(v) = (u, v) \quad \text{für alle } v \in H$$

Hinweis: Man verwende das Lemma von Lax-Milgram mit einer geeigneten Bilinearform a.

Bemerkung: Man bezeichnet dann das eindeutige u naheliegenderweise mit f. Die lineare und stetige Abbildung $H^* \to H$, $F \mapsto f$ bezeichnet man als *kanonische Einbettung von H^* in H*. Damit kann man H^* mit H selbst identifizieren: $H \simeq H^*$.

3) Die Elliptizität der Bilinearform a ist wesentlich

a) Wenn der zugrundeliegende Raum eine endliche Dimension hat, wenn also z. B. $V = \mathbb{R}^N$, braucht man statt der Elliptizität der Bilinearform a nur

$$a(v, v) > 0 \quad \text{für alle } v \in H\,,\ v \neq 0$$

zu fordern. Warum?

Hinweis: Kompaktheit der Einheitskugel.

b) Dass man im unendlich-dimensionalen Fall nicht mit der obigen Bedingung auskommt, zeigt folgendes Beispiel: Wir betrachten den Raum der unendlichen Folgen $x := (x_1, x_2, \ldots)$ mit beschränkter Norm,

$$H := \ell_2 := \Big\{x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\Big|\; \|x\|^2 := \sum_{m=1}^{\infty} x_m^2 < \infty\Big\}\,,$$

sowie die Bilinearform

$$a(x, y) := \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}\, x_m\, y_m$$

und das lineare Funktional

$$(f, x) := \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}\, x_m\,.$$

Man zeige,

$$J(x) := \frac{1}{2}\, a(x,x) - (f,x)$$

nimmt sein Minimum in $H = \ell_2$ nicht an.

4) Lemma von der Abrundung der Ecken

Zunächst eine Definition: Es seien s, l, $k \in \mathbf{N}_0$ und $n \in \mathbf{N}$. Ferner sei $a < \tau_1 < \ldots < \tau_s < b$ eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ mit s inneren Knoten.

Dann bezeichnet man als stückweise C^k-Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$ mit s inneren Knoten und Werten im $\mathbf{R}^n$ im Zeichen $C_s^k([a,b],\mathbf{R}^n)$ Funktionen, die das Intervall $[a,b]$ auf den $\mathbf{R}^n$ abbilden, in den Randpunkten a, b stetig sind und in jedem halboffenen Teilintervall $[\tau_j,\tau_{j+1}[$, $j = 1,\ldots,s-1$, eine C^k-Fortsetzung auf das abgeschlossene Intervall $[\tau_j,\tau_{j+1}]$ besitzen. Insbesondere besitzen damit diese Funktionen und alle ihre Ableitungen bis zur Ordnung k in den Rand- und Zwischenpunkten einseitige Grenzwerte.

Für $l < k$ werden mit $C_s^{l,k}([a,b],\mathbf{R}^n)$ diejenigen $C_s^k([a,b],\mathbf{R}^n)$-Funktionen bezeichnet, die zugleich $C^l([a,b],\mathbf{R}^n)$-Funktionen sind.

Man zeige:

a) Zu jeder stückweisen C^1-Funktion $v \in C_s^{0,1}[a,b]$ mit endlich vielen Ecken τ_k, $k = 1,\ldots,s$, und jedem hinreichend kleinen $\delta > 0$ existiert eine C^1-Funktion $w = w_\delta \in C^1[a,b]$ mit den folgenden Eigenschaften

(i) Es gilt $w(t) = v(t)$ für alle $t \in [a,b]$ mit Abstand $|t-\tau_k| \geq \delta$ für alle Ecken τ_k der Funktion v.

(ii) Für jede dieser Ecken τ_k, $k \in \{1,\ldots,s\}$, gilt die Fehlerabschätzung

$$\max_{|t-\tau_k|\leq\delta} |w'(t)| \leq 5 \sup_{|t-\tau_k|\leq\delta} |v'(t)|\,.$$

b) Für ein zulässiges $\delta > 0$ und ein zugehöriges w_δ gemäß Teilaufgabe a) gilt

$$\|v - w_\delta\|_\infty \leq 6\,\delta\,\|v'\|_\infty\,.$$

c) Ist

$$I(v) := \int_a^b g(t,v,v')\,\mathrm{d}t$$

ein Funktional in Integralform mit $g \in C([a,b]\times\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$, so gibt es zu jedem $v \in C_s^{0,1}[a,b]$ und $\varepsilon > 0$ ein $w \in C^1[a,b]$ mit $w(a) = v(a)$, $w(b) = v(b)$ und

$$\|v - w\|_\infty < \varepsilon\,, \quad |I(v) - I(w)\| < \varepsilon\,.$$