Prof. Dr. H. J. Pesch
Lehrstuhl für Ingenieurmathematik
Universität Bayreuth

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen
Optimal Control of Partial Differential Equations
(Teil 1: WS 2011/12)

2. Übung

Vorbemerkung:

In diesem Übungsblatt werden einige grundlegende Eigenschaften der speziellen Sobolewräume $H^m(\Omega)$ und $H_0^m(\Omega)$, meist für $m = 1$, behandelt. Sobolewräume sind Funktionenräume und stellen ein sehr wichtiges funktionalanalytisches Hilfsmittel für die Theorie und Numerik von partiellen Differentialgleichungen dar. Die allgemeinen Sobolewräume $W^{m,p}(\Omega)$ sind Banachräume (mit Norm), nur die speziellen Räume $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$ sind Hilberträume (mit Skalarprodukt). Dabei werden Funktionen, die sich nur auf einer Menge vom Maß Null unterscheiden, als gleich, als Mitglieder *einer* Äquivalenzklasse angesehen. Desweiteren sind diese Räume vollständig, so dass jede Cauchy-Folge von Funktionen auch in diesen Räumen konvergiert. Alternativ zur Definition der Vorlesung mithilfe der schwachen Ableitungen kann man die Sobolewräume $W^{m,p}(\Omega)$ $(W_0^{m,p}(\Omega))$ auch als Vervollständigung aller $C^\infty(\Omega)$- bzw. $C_0^\infty(\Omega)$-Funktionen bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ verstehen, also als Vervollständigung aller Funktionen, die unendlich oft stetig partiell differenzierbar sind bzw. zusätzlich noch außerhalb eines kompakten Trägers verschwinden. Die Sobolewräume enthalten die Menge der $C^\infty(\Omega)$- bzw. $C_0^\infty(\Omega)$-Funktionen dann dicht.

Auf der Basis des Konzepts der Sobolewräume lassen sich dann sowohl Existenzaussagen für Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen beweisen, als auch Konvergenzaussagen für Folgen numerischer Approximationen gewinnen.

In Aufgabe 1 wird die Äquivalenz von Normen und Seminormen von Sobolewräumen untersucht und die wichtige Poincaré-Friedrich-Ungleichung bewiesen. Die wichtigen Sobolewräume $H^1(\Omega)$ und $H_0^1(\Omega)$ stehen im Vordergrund der Aufgabe 2. Aufgabe 3 zeigt, dass die Minimierung von Funktionalen, *das* Ziel unserer Vorlesung, auf Sobolewräumen erfolgen muss, da deren Vollständigkeit für die Wohlgestelltheit der Aufgaben der optimalen Steuerung bei partiellen Differentialgleichungen wesentlich benötigt wird.

Man ist leicht geneigt, für praktische Anwendungen nur klassischen Lösungen eine Bedeutung beizumessen und schwache Lösungen mit Singularitäten aus Sobolewräumen — siehe Aufgaben 4 — als rein mathematische Objekte abzuwerten. Dass dies aber keineswegs zutrifft, macht Aufgabe 5 deutlich. Sind m und p allerdings hinreichend groß, enthalten Sobolewräume hinreichend glatte Funktionen; siehe Bemerkungen zu Aufgabe 4.

Literatur:

Adams, R. A.: *Sobolev Spaces*, New York: Academic Press, 1975.

Alt, H. W.: *Lineare Funktionalanalysis*, 4. Auflage, Berlin: Springer, 2002.

Heuser, H.: *Funktionalanalysis*, 3. Auflage, Stuttgart: Teubner, 1992.

Litvinov, W. G.: *Optimization in Elliptic Problems with Applications to Mechanics and Deformable Bodies and Fluid Mechanics*, Basel: Birkhäuser, 2000, Kapitel 1.

Lusternik, L. A., Sobolew, W. I.: *Elemente der Funktionalanalysis*, Berlin: Akademie-Verlag, 1999.

1) Die Poincaré-Friedrichssche Ungleichung

In Räumen mit verallgemeinerten Nullrandbedingungen wie z. B. in den Sobolewräumen H_0^m sind die Seminormen

$$|u|_m := \sqrt{\sum_{|\alpha|=m} ||\partial^\alpha u||^2_{L_2(\Omega)}}$$

zu den Normen

$$||u||_m := \sqrt{(u,u)_m} := \sqrt{\sum_{|\alpha|\le m} ||\partial^\alpha u||^2_{L_2(\Omega)}} \quad \big(\text{Bez. in Vorl.: } \|\cdot\|_{H^m(\Omega)}\big)$$

auf beschränkten Gebieten äquivalent.

Dazu zeigen wir: Ist Ω in einem N-dimensionalen Würfel der Kantenlänge s enthalten, dann gilt:

a)

$$||v||_0 \le s\,|v|_1 \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Dies ist die so genannte Poincaré-Friedrichs-Ungleichung.

Hinweis: Da C_0^∞ dicht bzgl. $\|\cdot\|_1$ in $H_0^1(\Omega)$ ist, genügt es, die Poincaré-Friedrichs-Ungleichung für $v \in C_0^\infty(\Omega)$ zu beweisen. Man gehe aus von dem Ansatz

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_N) = v(0, x_2, \ldots, x_N) + \int_0^{x_1} \partial_1 v(\xi, x_2, \ldots, x_N)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Bemerkung: Zum Nachweis der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung sind Nullrandbedingungen nur auf einem Teil des Randes nötig. Wenn $\Gamma = \partial\Omega$ stückweise glatt ist, genügt es, dass die Funktion auf einem Teil des Randes Γ_D verschwindet und Γ_D eine Menge mit positivem $n-1$-dimensionalen Maß ist.

b)

$$|\partial^\alpha u|_0 \leq s\, |\partial_1 \partial^\alpha u|_0 \quad \text{für alle } |\alpha| \leq m-1 \text{ und } u \in H_0^m(\Omega)\,.$$

c)

$$|v|_m \leq ||v||_m \leq (1+s)^m\, |v|_m \quad \text{für alle } v \in H_0^m(\Omega)\,.$$

Bemerkung: Die Äquivalenz zwischen Norm und Seminorm kann man sich bei Abschätzungen häufig zu nutze machen, da Abschätzungen für die Seminorm in der Regel weniger Rechenaufwand bedeuten.

Man beachte jedoch, dass in allgemeinen unendlichdimensionalen Räumen nicht alle Normen paarweise äquivalent sind; siehe z. B. Alt, S. 2 und 91: Es gilt offensichtlich $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\,\|u\|_{C^0(\Omega)}$ für alle $u \in C^0(\Omega)$, aber nicht die Umkehrung. Betrachten Sie dazu die Funktionen $u_\varepsilon(x) := \max\{0, \frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \frac{|x|}{\varepsilon}\right)\}^{1/2}$ mit $0 < \varepsilon < 1$, für die $\|u_\varepsilon\|_{C^0[-1,1]} = \varepsilon^{-1/2}$, aber $\|u_\varepsilon\|_{L^2[-1,1]} = 1$.

2) $H_0^1(\Omega)$ ist ein echter Unterraum von $H^1(\Omega)$

Es sei Ω ein nichtleeres, beschränktes Gebiet. Man zeige mit der Poincaré-Friedrichs'schen Ungleichung, dass die konstante Funktion $u = 1$ nicht in $H_0^1(\Omega)$ enthalten ist.

Bemerkung: Das bedeutet auch, dass die Ungleichung von Poincaré-Friedrichs wesentlich mit dem Raum $H_0^1(\Omega)$ verbunden ist. In $H^1(\Omega)$ kann sie nicht gelten: Übergang von v nach $v + \text{const}$ mit einer beliebigen Konstante ändert nur die linke Seite der Poincaré-Friedrichs'schen Ungleichung.

3) Dirichlet-Prinzip

Dirichlet erklärte, dass aus der Beschränktheit eines Funktional $J(u)$ nach unten, welches auf einer gegebenen Funktionenklasse definiert ist, stets folge, dass J sein Minimum auch für eine Funktion u aus dieser Funktionenklasse annimmt. Dieses Argument bezeichnet man heute als Dirichlet-Prinzip. Es wurde 1870 von Weierstraß widerlegt.

Man gebe ein Gegenbeispiel für das Dirichletsche Prinzip an.

Hinweis: Man untersuche dazu z. B. das Integral

$$J(u) = \int\limits_0^1 u^2(t)\,\mathrm{d}t$$

auf einer geeigneten Teilmenge der stetigen Funktionen $C^0[0,1]$.

4) $H^1[a,b] \subset C[a,b]$, aber $H^1(\Omega) \not\subset C(\Omega)$, wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ mit $N \geq 2$

Bekanntlich gibt es in $L_2(\Omega)$ auch unbeschränkte Funktionen. Wie weit auch höhere Sobolewräume noch solche Funktionen enthalten, hängt von der Dimension des Gebietes ab. Dies soll anhand des Sobolewraumes $H^1(\Omega)$ als dem wichtigsten Raum erläutert werden.

Man zeige:

a) Es sei $\Omega = [a,b]$ ein reelles Intervall. Dann ist $H^1[a,b] \subset C[a,b]$.
Hinweis: Man hat zu zeigen: Für ein beliebiges $u \in H^1[a,b]$, das als Grenzelement einer Cauchy-Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $H^1[a,b] \cap C^\infty[a,b]$ angenommen werden darf, gilt $u \in C^0[a,b]$. Damit sich die Stetigkeit der Folgenglieder $u_n \in C^\infty[a,b]$ auf das Grenzelement vererbt, muss die Folge gleichmäßig konvergent sein; siehe z. B. Satz 104.2, Heuser, Lehrbuch der Analysis, Teil 1, Seite 551. Zum Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz verwende man den Satz von Arzelà-Ascoli; siehe z. B. Satz 106.2, Heuser, Analysis 1, S. 563f. Dazu muss man zeigen, jede Cauchy-Folge in $H^1[a,b] \cap C^\infty[a,b]$ ist gleichgradig stetig, d. i.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in [a,b]\ \forall\, \tilde{u} \in \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}\colon$$
$$|x-y| < \delta \Longrightarrow |\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| < \varepsilon\,,$$

und gleichmäßig beschränkt, d. i.

$$\exists\, M \in \mathbb{R}\ \forall\, \tilde{u} \in \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}\ \forall\, x \in [a,b]\colon |\tilde{u}(x)| < M\,.$$

Für die gleichgradige Stetigkeit schätze man ab:

$$|u_n(x) - u_n(y)| = |\int\limits_x^y u_n'(t)\,\mathrm{d}t|\,.$$

Warum ist das Supremum $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{\|u_n\|_1\}$ beschränkt, wenn $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist?
Für die gleichmäßige Beschränktheit zeige man zunächst

$$\|\tilde{u}\|_1 \le \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\|u_n\|_1\} \text{ für alle } \tilde{u} \in \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

und führe dann einen indirekten Beweis.

b) Schon für zweidimensionale Gebiete Ω ist die entsprechende Aussage nicht mehr richtig. Dazu untersuche man die Funktion

$$u(x,y) = \ln\left(\ln\frac{2}{r}\right)\,, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}\,,$$

auf dem offenen Einheitskreis.

c) Für beschränkte N-dimensionale Gebiete, $N \ge 3$, untersuche man die Funktion

$$u(x) = r^{-\alpha}\,,\ r = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\,,\ 0 < \alpha < \frac{N-2}{2}\,,$$

und zeige, dass $u \in H^1(\Omega)$.
Was folgt für die Singularitäten von u mit wachsendem N?
Hinweis: Wegen der Äquivalenz von Norm und Seminorm reicht es zu zeigen, dass in einer hinreichend großen N-dimensionalen Kugel $K_R(0) \supset \Omega$ mit Mittelpunkt 0 und Radius R gilt:

$$|u|_1^2 = \int\limits_{K_R(0)} |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_N < \infty\,.$$

Wegen der Singularität in $r = 0$ schätze man zunächst das eigentliche Integral

$$|u|_1^2 = \int\limits_{K_{\varrho,R}(0)} |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_N < \infty$$

über die „gelochte“ Kugel $K_{\varrho,R}(0) := K_R(0)\setminus K_\varrho(0)$ mit Innenradius ϱ, $0 < \varrho < R$, und Außenradius R ab und lasse am Ende $\varrho \to 0$ gehen. Man benutze N-dimensionale Kugelkoordinaten, vergleichbar dem Prinzip von Cavalieri — siehe Heuser, Analysis 2, Seite 468f: Dazu muss man nur wissen, dass das Oberflächenelement die Form $r^{N-1}\,\Phi(\varphi_1,\ldots,\varphi_{N-1})\,\mathrm{d}\varphi_1\ldots\mathrm{d}\varphi_{N-1}\,\mathrm{d}r$ hat. Der Beitrag durch die Integrationen über die $N-1$ Raumwinkel $\varphi_1,\ldots,\varphi_{N-1}$ ergibt dann lediglich eine nur von N abhängige Konstante c_N, die Oberfläche der N-dimensionalen Einheitskugel: $c_N = 2\,\sqrt{\pi}^N/\Gamma(\frac{N}{2})$.

Bemerkungen:

– H^2- Funktionen mit einem Definitionsbereich im $\mathbb{R}^2$ sind stetig. Zum Beweis braucht man allerdings einen Einbettungs- und Spursatz; siehe z. B. D. Braess: *Finite Elemente*, Berlin: Springer, 1992, § 3.

– Allgemeiner gilt: Sobolewräume lassen sich in Hölder-Räume stetig einbetten; siehe Alt, Seiten 41 und 317: Es sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offenes und beschränktes Lipschitz-Gebiet. Weiter seien m, p und k ganze Zahlen mit $m\geq 1$, $1\leq p<\infty$, $k\geq 0$ und γ reell mit $0\leq\gamma\leq 1$. Dann gilt: Ist

$$m-\frac{n}{p}=k+\gamma\,,\quad \text{sowie } 0<\gamma<1 \text{ (also } \gamma\neq 0,1)\,,$$

so existiert die Einbettung

$$\mathrm{id}\colon W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$$

und ist (offensichtlich) linear, aber auch stetig. Genauer: Zu jedem $u\in W^{m,p}(\Omega)$ gibt es genau eine für $|s|\leq k$ auf Ω k-mal stetig differenzierbare und auf $\bar{\Omega}$ stetig fortsetzbare sowie für $s=k$ Hölder-stetige Funktion, welche fast überall mit u übereinstimmt — wir bezeichnen sie wieder mit u —, so dass

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})}\leq C(\Omega,n,m,p,k,\gamma)\,\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}\quad \text{(Stetigkeit! § 2.4)}\,.$$

Dabei heißt eine Funktion $v\colon V\to Y$ mit $V\subset\mathbb{R}^n$ und $\{Y,\|\cdot\|\}$, Banachraum, Hölder-stetig, wenn

$$\sup_{x,y\in V,\,x\neq y}\frac{\|v(x)-v(y)\|_Y}{\|x-y\|_{\mathbb{R}^n}^{\gamma}}<\infty\,.$$

Ist $\gamma=1$, nennt man die Funktionen Lipschitz-stetig. Mit geeigneter Norm sind die Hölder-Räume $C^{k,\gamma}(\Omega)$, $\Omega\in\mathbb{R}^n$, auch Banachräume. Als Norm wählt man — hier ist $\{Y,\|\cdot\|\}=\{\mathbf{R}^n,|\cdot|\}$ —

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\Omega)}:=\sum_{|\alpha|\leq k}\|D^\alpha u\|_{C(\Omega)}+\sum_{|\alpha|=k}|D^\alpha u|_{C^{0,\gamma}(\Omega)}\,.$$

Hierbei bezeichnet $\|D^\alpha u\|_{C(\Omega)}:=\sup_{x\in\Omega}|D^\alpha u(x)|$ die Supremumsnorm im Raum der stetigen Funktionen und $|D^\alpha u|_{C^{0,\gamma}(\Omega)}$ die folgende Halbnorm

$$|D^\alpha u|_{C^{0,\gamma}(\Omega)}:=\sup_{x,y\in\Omega,\,x\neq y}\frac{|D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\gamma}\,.$$

5) Höhere Ableitungen klassischer Lösungen elliptischer partieller Differentialgleichungen müssen nicht beschränkt sein

Man betrachte ein zweidimensionales Gebiet mit einspringender Ecke

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\,,\; x < 0 \text{ oder } y > 0\}\,.$$

Gesucht ist die Lösung der elliptischen Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega\,, \\ u(e^{i\varphi}) &= \sin\left(\frac{2}{3}\,\varphi\right) && \text{für } 0 \le \varphi \le \frac{3}{2}\,\pi\,, \\ u &= 0 && \text{sonst auf } \partial\Omega\,. \end{aligned}$$

Man identifiziere $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$, löse die Randwertaufgabe und zeige, dass nicht einmal die ersten Ableitungen von u beschränkt sind, wenn $z = x + i\,y \to 0$.