Prof. Dr. H. J. Pesch
Lehrstuhl für Ingenieurmathematik
Universität Bayreuth

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen
Optimal Control of Partial Differential Equations
(Teil 1: WS 2011/12)

1. Übung

Vorbemerkung:

Wer selbstständig seine Kenntnisse auf dem Gebiet der Partiellen Differentialgleichungen über den in der Vorlesung behandelten Stoff erweitern möchte, dem seien die folgenden Bücher empfohlen. Die ersten drei Bücher sind elementar und sollten ab dem 5. Semester verstehbar sein. Das Buch von Wloka ist dagegen eher für Fortgeschrittenen oder als Begleitbuch zu einer Vorlesung über die Theorie partieller Differentialgleichungen geeignet.

Partielle Differentialgleichungen sind ein schwieriges Gebiet. Verschiedene Klassen partieller Differentialgleichungen stellen nicht selten eigenständige Forschungsgebiete dar. Dennoch lassen sich neben den Grobeinteilungen wie linear, semilinear, quasilinear und nichtlinear sowie homogen und inhomogen und skalare Gleichungen und Systeme von Gleichungen gewisse elementare Typen näher klassifizieren. Im Vordergrund der Vorlesung stehen partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei oder drei unabhängigen Variablen, von denen eine die Zeit darstellen kann. Die anderen Variablen sind dann Ortsvariable. Ordnung, d. i. die höchste vorkommende Ableitungsordnung, und Anzahl der unabhängigen Variablen sind also weitere Charakterisierungsmerkmale.

Zur Einführung in die klassische Typeneinteilung, elliptisch, parabolisch und hyperbolisch, die entscheidenden Einfluss auf die Vorgabe sinnvoller, d. h. wohlgestellter Anfangs- und Randbedingungen hat, konzentrieren wir uns in diesem Übungsblatt ausschließlich auf lineare partielle Differentialgleichungen, meist sogar auf solche mit konstanten Koeffizienten.

Literatur:

1. Chester, C. R.: *Techniques in Partial Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1971. (Buch nicht mehr im Handel.)
2. Evans, L. C.: *Partial Differential Equations*, Providence: American Mathematical Society, 2002.
3. Meister, E.: *Partielle Differentialgleichungen — Eine Einführung für Physiker und Ingenieure in die klassische Theorie*, Berlin: Akademie-Verlag, 1996.

4. Strauss, W. A.: *Partielle Differentialgleichungen — Eine Einführung*, Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg, 1995.
5. Wloka, J.: *Partielle Differentialgleichungen*, Leipzig: Teubner, 1982.

Anleitung zu den nachfolgenden Aufgaben: Ein Steilkurs zur Klassifikation linearer partieller Differentialgleichungen und deren Normalformen:

Jedem linearen Differentialoperator zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} L[u] &:= a(x,y)\,u_{xx} + 2\,b(x,y)\,u_{xy} + c(x,y)\,u_{yy} \\ &= \Big(a(x,y)\,D_x^2 + 2\,b(x,y)\,D_x\,D_y + c(x,y)\,D_y^2\Big)[u] \end{aligned}$$

lassen sich quadratische Formen Q und q der Gestalt

$$\begin{aligned} Q(\xi,\eta) &:= a(x,y)\,\xi^2 + 2\,b(x,y)\,\xi\,\eta + c(x,y)\,\eta^2 \\ &=: \eta^2\,q(\zeta) \qquad \text{mit} \quad q(\zeta) = a(x,y)\,\zeta^2 - 2\,b(x,y)\,\zeta + c(x,y) \\ & \qquad\qquad\quad\;\; \text{und} \quad \zeta := -\frac{\xi}{\eta} \end{aligned}$$

zuordnen. Der Differentialoperator L heisst dann in (x,y) elliptisch (parabolisch, hyperbolisch), wenn die Diskriminante

$$D(x,y) := b(x,y)^2 - a(x,y)\,c(x,y) \begin{cases} < 0\,, \\ = 0\,, \\ > 0\,. \end{cases}$$

Dem Differentialoperator L lassen sich ferner, abhängig vom Vorzeichen der Diskriminante, entweder zwei reelle oder eine reelle oder ein Paar konjugiert komplexe charakteristische Kurvenscharen zuordnen. Das sind die Lösungsscharen der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \zeta_\pm(x,y)\,,$$

wobei $\zeta_\pm(x,y)$ die beiden, nicht notwendig verschiedenen, reellen oder komplexen Wurzeln der quadratischen Gleichung $q(\zeta) = 0$ sind. Nehmen wir zunächst ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ an, in dem die Diskriminante D stets positiv ist. Die Lösungsscharen der beiden in diesem Falle voneinander unabhängigen Differentialgleichungen sollen wie folgt bezeichnet werden (sogenannte α- bzw. β-Charakteristiken; im hyperbolischen Fall sind α und β reell. Auch im elliptischen Fall sind diese reell, wenn man Real- und Imaginärteil der Wurzeln $\zeta_\pm(x,y)$ separat betrachtet. Im parabolischen Fall wählt man eine nicht mit der charakteristischen Kurvenschar zusammenfallende beliebige zweite Schar.):

$$\Phi(x, y) = \alpha\,,$$

$$\Psi(x, y) = \beta\,.$$

Führen wir α und β als neue unabhängige Variable ein, d. h. setzen wir $u(x, y) = U(\alpha, \beta)$ mit $\alpha = \Phi(x, y)$ und $\beta = \Psi(x, y)$, erhalten wir (nach längerer Rechnung) den neuen Differentialoperator:

$$L = \hat{a}(\alpha, \beta)\, U_{\alpha\alpha} + 2\,\hat{b}(\alpha, \beta)\, U_{\alpha\beta} + \hat{c}(\alpha, \beta)\, U_{\beta\beta}$$

mit

$$\begin{aligned}
\hat{a} &= a\,\Phi_x^2 + 2\,b\,\Phi_x\,\Phi_y + c\,\Phi_y^2 = Q(\Phi_x, \Phi_y)\,,\\
\hat{b} &= a\,\Phi_x\,\Phi_y + b\,\left(\Phi_x\,\Psi_y + \Phi_y\,\Psi_x\right) + c\,\Phi_y\,\Psi_y\,,\\
\hat{c} &= a\,\Psi_x^2 + 2\,b\,\Psi_x\,\Psi_y + c\,\Psi_y^2 = Q(\Psi_x, \Psi_y)\,.
\end{aligned}$$

In den neuen Variablen (α, β) schreibt sich im hyperbolischen Fall L dann als

$$L[U] = U_{\alpha\beta}\,.$$

Beispiel: Die inhomogene eindimensionale Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2\,u_{xx} = f(x, t)\,, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Die Transformation $\alpha = \Phi(x, t) := x - c\,t$ und $\beta = \Psi(x, t) := x + c\,t$ führt für $U(\alpha, \beta) := u(x, t)$ auf die Normalform

$$U_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4c^2}\,F(\alpha, \beta) := f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{\alpha - \beta}{-2c}\right)\,.$$

Für $f \equiv 0$ bzw. $F \equiv 0$ findet man durch zweimalige Integration die allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung:

$$U_h(\alpha, \beta) = g(\alpha) + h(\beta) \quad \text{bzw.} \quad u_h(x, t) = g(x - c\,t) + h(x + c\,t)$$

mit beliebigen Funktionen g und h. Man beachte, dass bei Integration über β die Integrations"konstante" von α abhängen kann; analog bei der Integration über β.

Die partikuläre Lösung berechnet man dann aus

$$U_p(\alpha, \beta) = -\iint \frac{1}{4c^2}\,F(\alpha, \beta)\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\alpha\,.$$

Rücksubstitution $\alpha = x - c\,t$ und $\beta = x + c\,t$ ergibt dann die allgemeine Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$u(x, t) = U_h(\alpha, \beta) + U_p(\alpha, \beta) = g(x - c\,t) + h(x + c\,t) + U_p(x - c\,t, x + c\,t)\,.$$

1) Klassifikation und Normalformen von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei unabhängigen Variablen

Betrachtet wird die lineare Gleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$u_{xx} - u_{xy} - 6\,u_{yy} + 3\,u_x + 3\,u_y - 12\,u = 0\,.$$

a) Man bestimme den Typ der partiellen Gleichung.

b) Man bestimme die Charakteristiken der partiellen Gleichung.

c) Man bestimme die Normalform der partiellen Gleichung.

2) Die Tricomi-Differentialgleichung

Man klassifiziere und bestimme alle Normalenformen der Gleichung von Tricomi (linear, von zweiter Ordnung, mit variablen Koeffizienten):

$$y\,u_{xx} + u_{yy} = 0\,.$$

Hinweis: Im Gebiet, in dem die Tricomi-Differentialgleichung elliptisch ist, erhält man als charakterische Kurvenschar in $\mathbb{C}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \Phi(x,y) + i\,\Psi(x,y) = \gamma \quad \text{mit} \quad \gamma = \alpha + i\,\beta\,,$$

woraus sich durch Vergleich der Real- und Imaginärteile wiederum zwei reelle Kurvenscharen ergeben.

3) Klassifikation und Normalformen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung in drei unabhängigen Variablen

Man klassifiziere und bestimme die Normalenformen der folgenden Gleichungen (alle linear, von zweiter Ordnung, mit konstanten Koeffizienten):

a)

$$u_{xx} + 2\,u_{xy} + u_{yy} + u_{zz} + u_x + u_y + u_z = 0\,,$$

b)

$$3\,u_{xx} + 10\,u_{xy} + 3\,u_{yy} + u_t = 0\,.$$

Hinweis: Man stelle die zugehörigen Quadriken auf und führe eine Hauptachsentransformation der Quadrikvariablen durch. Bei linearen partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten entscheiden dann die Eigenwerte der zugehörigen Quadrik über den Typ der Gleichung. Sind alle Eigenwerte positiv oder negativ, liegt eine elliptische Gleichung vor. Ist genau ein Eigenwert Null und haben alle anderen das gleiche Vorzeichen, liegt eine parabolische Gleichung vor. Ansonsten spricht man von hyperbolischen (alle bis auf einen Eigenwert haben das gleiche Vorzeichen, kein Eigenwert ist Null) oder ultrahyperbolischen Differentialgleichungen (sonstige Fälle). Der Weg über die Hauptachsentransformation stellt auch bei zwei unabhängigen Variablen einen alternativen Lösungsweg zur Anleitung dar. Aus der transformierten Quadrik erhält man dann eine Form der Differentialgleichung, aus der man nach Elimination der Terme erster Ordnung, wenn dies möglich ist, die zugehörige Normalform erhält. Auf die Elimination der Terme erster Ordnung wollen wir in diesem Zusammenhang nicht eingehen.

4) Systeme von partiellen Differentialgleichungen. Das Beispiel von Perron (1928)

Auch bei Systemen von partiellen Differentialgleichungen ist eine Typeneinteilung notwendig. Das zeigt das Beispiel von Perron.

Gegeben ist ein Anfangswertproblem auf $\Omega = \mathbb{R}^2$ für zwei partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} v_x - v_y \qquad\qquad &- w_y = 0 \\ + b\, v_y - w_x &+ w_y = -f(x+y) \end{aligned}$$

mit

$$v(0,y) = 0\,, \quad w(0,y) = 0\,.$$

Man untersuche in Abhängigkeit vom Vorzeichen des Parameters $b \in \mathbb{R}$, welche Anforderungen bzgl. Integrierbarkeit bzw. Differenzierbarkeit an die Inhomogenität f zu stellen sind. Dazu zeige man:

a) Im Falle $b > 0$ („hyperbolisch") ist (im Folgenden sei $a := \sqrt{b}$)

$$v(x,y) = \frac{1}{2b}\left\{ \int\limits_{x+y}^{x+y+ax} f(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{x+y}^{x+y-ax} f(t)\,\mathrm{d}t \right\}$$

$$w(x,y) = \frac{1}{2a} \int\limits_{x+y-ax}^{x+y+ax} f(t)\,\mathrm{d}t$$

eine Lösung der Anfangswertaufgabe.

b) Im Falle $b = 0$ („parabolisch“) ist

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \frac{1}{2}\,x^2\,f'(x+y) \\ w(x,y) &= x\,f(x+y) \end{aligned}$$

eine Lösung der Anfangswertaufgabe.

c) Im Falle $b < 0$ („elliptisch“) transformiere man das System vermöge (im Folgenden sei $a := \sqrt{-b}$)

$$\begin{aligned} &\xi := a\,x\,, \\ &\eta := x + y\,, \\ &\bar{v}(\xi,\eta) := a\,v + \frac{1}{a}\int\limits_{\eta_0}^{\eta} f(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad \eta_0 = \text{const}\,, \\ &\bar{w}(\xi,\eta) := w\,. \end{aligned}$$

Was folgt daraus für die Funktion $\bar{v}(z) + i\,\bar{w}(z)$ mit $z = x + i\,y$ und damit für f?

d) Man schreibe das System zweier Differentialgleichungen erster Ordnung um in eine Differentialgleichung zweiter Ordnung und bestimme den Typ.

Hinweis: Jede partielle Differentialgleichung höherer Ordnung lässt sich relativ einfach in ein System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung umformen, ähnlich wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Umgekehrt ist dies in vielen Fällen auch möglich, aber schwieriger. Kombiniere dazu die Gleichungen zu einer Gleichung der Art

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = L[w]\,, \quad L\text{: linearer Differentialoperator}\,,$$

und setze

$$w := \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \Rightarrow \quad L[w] = L[\frac{\partial u}{\partial x_i}] = \frac{\partial}{\partial x_i} L[u] \quad \Rightarrow \quad v = L[u]\,.$$

Ersetze dann in allen Gleichungen

$$\begin{aligned} &v := L[u]\,, \\ &w := \frac{\partial u}{\partial x_i}\,, \\ &\frac{\partial v}{\partial x_j} \quad \text{durch} \quad \frac{\partial}{\partial x_j} L[u]\,, \\ &\frac{\partial w}{\partial x_j} \quad \text{durch} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}\,. \end{aligned}$$

5) Nicht sachgemäß gestellte Aufgaben

Erläuterung: Eine abstrakte Aufgabe der Form $A(x) = y$, $x \in X$, $y \in Y$, heißt sachgemäß gestellt, wenn sie für alle $y \in Y$ eine eindeutige Lösung $x \in X$ besitzt und diese stetig von y abhängt. Es ist wichtig, eine mathematische Fragestellung als sachgemäß gestellt zu erkennen, da andernfalls prinzipielle Schwierigkeiten bei der (numerischen) Lösung zu erwarten sind.

a) Anfangswertprobleme bei elliptischen Gleichungen sind im Allg. nicht sachgemäß gestellt. Man betrachte dazu das folgende Anfangswertproblem für die Laplace-Gleichung mit einer Dirichletschen und einer Neumannschen Randbedingung:

$$\begin{aligned}
&\Delta u = 0 \text{ auf } \bar{\Omega} = [0,\infty) \times \mathbb{R}\,,\\
&u(0,y) = 0\,,\\
&\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0\,,\\ \frac{1}{n}\sin(n\,y) & \text{für } n \geq 1\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

Hinweis: Nach dem Satz von Cauchy-Kowalewskaja ist die Lösung eindeutig:

$$u_n(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0\,,\\ \frac{1}{n^2}\sin(n\,y)\sinh(n\,x) & \text{für } n \geq 1\,. \end{cases}$$

Man untersuche die stetige Abhängigkeit der Lösung für $n \to \infty$.

b) Randwertprobleme bei hyperbolischen Gleichungen sind im Allg. nicht sachgemäß gestellt. Man betrachte dazu das folgende Randwertproblem für die Wellengleichung

$$\begin{aligned}
&u_{xx} - u_{yy} = 0 \text{ auf } \bar{\Omega} = [0,1] \times [0,\frac{1}{\pi}]\,,\\
&u(x,0) = u(0,y) = u(1,y) = 0\,,\\
&u(x,\frac{1}{\pi}) = \sin(n\,\pi\,x)\,,\ n \in \mathbb{N}\,.
\end{aligned}$$

Hinweis: Man untersuche die Funktion

$$u_n(x,y) = \frac{\sin(n\,\pi\,x)\,\sin(n\,\pi\,y)}{\sin n}\,.$$

Abgabe: Lösungsvorschläge zu den Aufgaben werden vorgerechnet oder ausgeteilt.